

UKŁADY CAŁKOWALNE I GEOMETRIA

Adam Doliwa

doliwa@matman.uwm.edu.pl

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
Wydział Matematyki i Informatyki

HORYZONTY MATEMATYKI 2014

Będlewo, 19 marca 2014 r.

- 1 Rozwiązalność, symetrie, prawa zachowania
 - Rozwiązalność równań algebraicznych i różniczkowych
 - Równanie Kortewega—de Vriesa (KdV)
 - Przykłady z geometrii różniczkowej
- 2 Przykład kombinatoryczny – rosnące podciągi w permutacjach i równania Painlevé
- 3 Dyskretne układy całkowalne i geometria incydencyjna

- 1 Rozwiązalność, symetrie, prawa zachowania
 - Rozwiązalność równań algebraicznych i różniczkowych
 - Równanie Kortewega—de Vriesa (KdV)
 - Przykłady z geometrii różniczkowej
- 2 Przykład kombinatoryczny – rosnące podciągi w permutacjach i równania Painlevé
- 3 Dyskretne układy całkowalne i geometria incydencyjna

Problem rozwiązalności przez pierwiastniki

Kiedy miejsca zerowe wielomianu $w(x) \in \mathbb{Q}[x]$ mogą być wyznaczone przy pomocy operacji arytmetycznych i wyciągania pierwiastków.



Évariste Galois (1811–1832)

Odpowiedź

Wtedy i tylko wtedy gdy odpowiednia grupa Galois jest rozwiązalna.

Rozwiązalność równań różniczkowych

Problem rozwiązalności w kwadraturach

Kiedy rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego $F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ może być otrzymane przy pomocy operacji algebraicznych, odwracania funkcji i liczenia całek nieoznaczonych.



Marius Sophus Lie (1842–1899)

Częściowa odpowiedź

Jeśli posiada n -parametrową rozwiązalną grupę symetrii (+ pewne warunki techniczne).

Równania mechaniki klasycznej

Przestrzeń fazowa: \mathcal{M}^{2n} , ξ^α , $\alpha = 1, \dots, 2n$, $\{\xi^\alpha, \xi^\beta\} = \Omega^{\alpha, \beta}(\xi)$

Struktura Poissona: $\{f(\xi), g(\xi)\} = \sum_{\alpha, \beta} \Omega^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial g}{\partial \xi^\beta}$

$$\Omega^{\alpha\beta} = -\Omega^{\beta\alpha}, \quad \text{tożsamość Jacobiego}$$

Ewolucja: H energia (funkcja Hamiltona)

$$\frac{d\xi^\alpha}{dt} = \{\xi^\alpha, H\} = \sum_{\beta} \Omega^{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi^\beta}$$

Przykład (Oscylator harmoniczny)

$$(p, q) \in \mathbb{R}^2, \quad \{p, q\} = 1, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(p, q) = \frac{1}{2} (p^2 + q^2)$$

$$\frac{dq}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -q, \quad \frac{d^2q}{dt^2} = -q$$

Zupełna całkowalność i współrzędne działanie–ką

Zupełna całkowalność: H oraz $(n - 1)$ całek ruchu Q_i w inwolucji

$$\{Q_i, H\} = 0, \quad \{Q_i, Q_j\} = 0$$

Zmienne działanie–ką: $\xi \rightarrow (\mathcal{I}_\alpha, \theta^\alpha), \quad k = 1, \dots, n$

$$\{\mathcal{I}^\alpha, \mathcal{I}^\beta\} = 0, \quad \{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = 0, \quad \{\mathcal{I}^\alpha, \theta^\beta\} = \delta^{\alpha\beta}$$

$$\frac{d\mathcal{I}^\alpha}{dt} = 0$$
$$\frac{d\theta^\alpha}{dt} = \phi^\alpha(I)$$

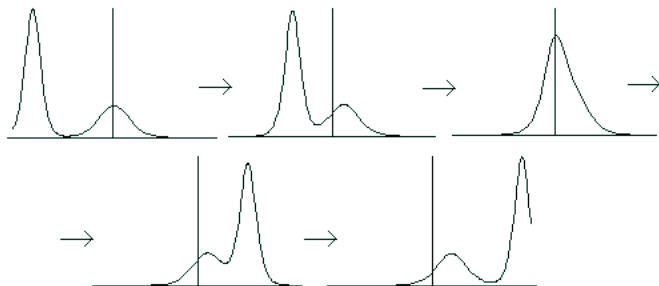
Równanie Kortewega—de Vriesa (KdV)

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \dots$$

$$v_t = -v_{xxx} + 6vv_x$$

$$\{v(x), v(y)\} = \delta'(x - y), \quad H[v] = \int \left(\frac{1}{2} v_x^2 + v^3 \right) dx$$

N. J. Zabusky, M. D. Kruskal (1965): zderzanie **solitonów**



Metoda spektralna

C.S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura (1967)

$$-\psi'' + v(x)\psi = k^2\psi$$

$$\psi \rightarrow \begin{cases} e^{ikx} + r(k)e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty \\ t(k)e^{ikx}, & x \rightarrow +\infty \end{cases}, \quad |t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1$$

$$k_j^2 = -\kappa_j^2, \quad j = 1, \dots, N, \quad \psi_j \rightarrow \begin{cases} e^{\kappa_j x}, & x \rightarrow -\infty \\ c_j e^{-\kappa_j x}, & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$v(x) \leftrightarrow \{r(k), \kappa_j, c_j\}$ transformacja spektralna

$$\begin{array}{ccc} v(x) & \rightarrow & v(x, t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{r(k), \kappa_j, c_j\} & \rightarrow & \{r(k, t), \kappa_j, c_j(t)\} \\ r(k, t) = r(k)e^{8ik^3t}, & & c_j(t) = c_j e^{4\kappa_j^3t} \end{array}$$

Zupełna całkowalność równania KdV

V. E. Zakharov, L. D. Faddeev (1971)

Zmienne działania:

$$\mathcal{I}(k) = \frac{2k}{\pi} \ln(1 - |r(k)|^2), \quad \kappa_j$$

Zmienne kąta:

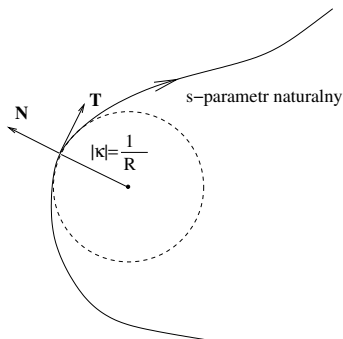
$$\theta(k) = \arg r(k), \quad \theta_j = \ln c_j$$

Funkcja (funkcjonał) Hamiltona:

$$H[v] = 8 \int_0^\infty k^3 \mathcal{I}(k) dk + \frac{32}{5} \sum_{j=1}^N \kappa_j^3$$

- geometria grup i algebr Liego jako ujęcie teorii symetrii równań różniczkowych
- geometria symplektyczna (poissonowska) jako matematyczna baza sformułowania pojęcia całkowności układów mechaniki klasycznej
- geometria algebraiczna jako źródło pewnych ważnych technik (teoria funkcji theta na powierzchniach Riemanna) otrzymywania rozwiązań równań całkownalnych
- geometria różniczkowa jako źródło ciekawych równań nieliniowych, czasami równań całkownalnych
- geometria nieprzemieniana, grupy kwantowe i rozwiązywalne układy fizyki statystycznej i kwantowej teorii pola

Ewolucja krzywej i równanie mKdV



Jeśli wektor prędkości punktów krzywej dany jest wzorem

$$\mathbf{r}_t = \kappa_s \mathbf{N} + \frac{1}{2} \kappa^2 \mathbf{T}$$

to jej krzywizna κ zmienia się zgodnie ze **zmodyfikowanym równaniem Kortewega—de Vriesa**

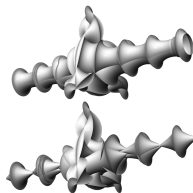
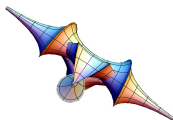
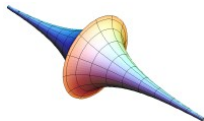
$$\kappa_t = \kappa_{sss} + \frac{3}{2} \kappa^2 \kappa_s$$

- równania Einsteina teorii grawitacji (pewne klasy rozwiązań)
- samo-dualne pola Yanga–Millsa
- odwzorowania harmoniczne rozmaitości riemannowskich
- „ciekawe” klasy sparametryzowanych podrozmaitości przestrzeni rzutowych — prace geometrów drugiej połowy XIX wieku (L. Bianchi, G. Darboux, . . .)

„ciekawe” \equiv posiadają transformacje wewnątrz danej klasy spełniające własność przemienności superpozycji

Powierzchnie pseudosferyczne

Powierzchnie w \mathbb{E}^3 o stałej ujemnej krzywiznie Gaussa



Niech $\theta: \mathbb{R}^2 \supset \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem równania sinus-Gordona

$$\theta_{uv} = \sin \theta$$

wtedy rozwiązanie $\theta^{(a)}$ układu równań (transformacja Bäcklunda)

$$\left(\frac{\theta^B - \theta}{2}\right)_u = k \sin\left(\frac{\theta^B + \theta}{2}\right)$$

$$\left(\frac{\theta^B + \theta}{2}\right)_v = \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\theta^B - \theta}{2}\right)$$

jest nowym rozwiązaniem równania sinus-Gordona.

Transformacja Bäcklunda i reguła Bianchiego superpozycji

Dane dwie transformaty θ^{B_1} i θ^{B_2} z parametrami k_1 i k_2 rozwiązania θ równania sinus-Gordona, wtedy funkcja $\theta^{B_{12}}$ otrzymana z „nieliniowej reguły superpozycji”

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\theta^{B_{12}} - \theta}{4} \right) = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \operatorname{tg} \left(\frac{\theta^{B_1} - \theta^{B_2}}{4} \right)$$

jest

- transformatą Bäcklunda rozwiązania θ^{B_1} z parametrem k_2
- transformatą Bäcklunda rozwiązania θ^{B_2} z parametrem k_1

- 1 Rozwiązalność, symetrie, prawa zachowania
 - Rozwiązalność równań algebraicznych i różniczkowych
 - Równanie Kortewega—de Vriesa (KdV)
 - Przykłady z geometrii różniczkowej
- 2 Przykład kombinatoryczny – rosnące podciągi w permutacjach i równania Painlevé
- 3 Dyskretne układy całkowalne i geometria incydencyjna

Najdłuższy rosnący podciąg w permutacji

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \underline{3} & 6 & 1 & \underline{4} & \underline{7} & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_7 \quad \ell_7(\pi) = 3$$

Wyposażając S_N w miarę jednorodną rozważamy

$$\rho_{n,N} = \text{Prob}(\ell_N(\pi) \leq n) = \frac{\#\{\pi \in S_N : \ell_N(\pi) \leq n\}}{N!}$$

- Erdős & Szekeres (1935): średnia długość $\mathbb{E}(\ell_N) \geq \frac{1}{2}\sqrt{N}$
- hipoteza Ulama (1961): istnieje $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(\ell_N)}{\sqrt{N}} = c$
- Hammersley (1972): granica istnieje
- Vershik & Kerov (1977): $c = 2$
- hipoteza Odlyzko & Rains (1993):
istnieje $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(\ell_N) - 2\sqrt{N}}{N^{1/6}} = c_1 \sim -1,758$

Niech

$$F(t) = e^{-\int_t^\infty (x-t)u(x)^2 dx} \quad \text{rozkład Tracy–Widoma}$$

gdzie

$$u'' = 2u^3 + xu, \quad u(x) \sim \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \quad \text{dla } x \rightarrow +\infty$$

Wtedy wycentrowane i przeskalowane ℓ_N

$$\chi_N(\pi) = \frac{\ell_N(\pi) - 2\sqrt{N}}{N^{1/6}}$$

daje w granicy $N \rightarrow \infty$ rozkład Tracy–Widoma

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob}(\chi_N \leq t) = F(t)$$

P. Painlevé, B. Gambier, R. Fuchs (1900–1905)

$$P_I: u'' = 6u^2 + x$$

$$P_{II}: u'' = 2u^3 + xu + \alpha$$

$$P_{III}: u'' = \frac{1}{u}(u')^2 - \frac{1}{x}u' + \frac{1}{x}(\alpha u^2 + \beta) + \gamma u^3 + \frac{\delta}{u}$$

$$P_{IV}: \dots$$

$$P_V: \dots$$

$$P_{VI}: u'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-x} \right) (u')^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{u-x} \right) u' \\ + \frac{u(u-1)(u-x)}{x^2(x-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{x}{u^2} + \gamma \frac{x-1}{(u-1)^2} + \delta \frac{x(x-1)}{(u-x)^2} \right)$$

- analiza funkcji korelacji dwuwymiarowego modelu Isinga (T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, E. Barouch, 1976)
- analiza funkcji korelacji jednowymiarowego gazu Bosego (M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri, M. Sato, 1980)
- dwuwymiarowa kwantowa grawitacja (E. Brezin, V. A. Kazakov, 1990)
- macierze losowe (C. A. Tracy, H. Widom, 1994)
- redukcje równań Einsteina (K. P. Tod, 1994)
- rozkład zer funkcji ζ -Riemanna (P. J. Forrester, A. M. Odlyzko, 1996)

Symetria skalowania równania mKdV

$$\kappa_t = -\kappa_{SSS} + 6\kappa^2\kappa_S$$

symetria skalowania (podobieństwa)

$$(\kappa, s, t) \mapsto (\tilde{\kappa}, \tilde{s}, \tilde{t}) = (\lambda^{-1}\kappa, \lambda s, \lambda^3 t)$$

$$\tilde{\kappa}_{\tilde{t}} - 6\tilde{\kappa}^2\tilde{\kappa}_{\tilde{S}} + \kappa_{\tilde{S}\tilde{S}\tilde{S}} = \lambda^{-4} \left(\kappa_t - 6\kappa^2\kappa_S + \kappa_{SSS} \right)$$

Szukamy rozwiązań równania mKdV wyrażających się przez niezmienniki $u = \kappa(3t)^{1/3}$, $x = s(3t)^{-1/3}$ symetrii skalowania

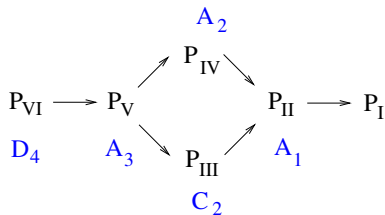
$$\kappa(s, t) = (3t)^{-1/3} u(x)$$

$$\kappa_t - 6\kappa^2\kappa_S + \kappa_{SSS} = (3t)^{-4/3} \left(u''' - 6u^2u' - u - xu' \right) = 0$$

Po odcałkowaniu otrzymujemy równanie P_{II}

$$u'' = 2u^3 + xu + \alpha$$

Kaskada degeneracji i symetrie równań Painlevé



Wychodząc od równania P_{III}

$$u'' = \frac{1}{u}(u')^2 - \frac{1}{x}u' + \frac{1}{x}(\alpha u^2 + \beta) + \gamma u^3 + \frac{\delta}{u}$$

oraz kładąc

$$\begin{aligned} u &= 1 + 2\epsilon\hat{u}, & x &= 1 + \epsilon^2\hat{x}, & \alpha &= -\frac{1}{2}\epsilon^{-6}, \\ \beta &= \frac{1}{2}\epsilon^{-6}(1 + 4\epsilon^3\hat{\alpha}), & \gamma &= \frac{1}{4}\epsilon^{-6}, & \delta &= -\frac{1}{4}\epsilon^{-6} \end{aligned}$$

otrzymujemy w granicy $\epsilon \rightarrow 0$ równanie P_{II}

- 1 Rozwiązalność, symetrie, prawa zachowania
 - Rozwiązalność równań algebraicznych i różniczkowych
 - Równanie Kortewega—de Vriesa (KdV)
 - Przykłady z geometrii różniczkowej
- 2 Przykład kombinatoryczny – rosnące podciągi w permutacjach i równania Painlevé
- 3 Dyskretne układy całkowalne i geometria incydencyjna

Dyskretne równanie mKdV

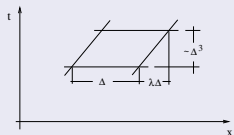
Notacja: $\phi_{(i)}(n) = \phi(n + \mathbf{e}_i)$, $\phi_{(ij)}(n) = \phi(n + \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)$

$$\phi_{(ij)} = \mu \phi \frac{\phi_{(i)} \mathcal{F}_i - \phi_{(j)} \mathcal{F}_j}{\phi_{(j)} \mathcal{F}_i - \phi_{(i)} \mathcal{F}_j}, \quad \phi : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{C}$$

$\mathcal{F}_i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ – dowolna funkcja zmiennej n_i

$\mu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ – dowolna funkcja zmiennej $n_\sigma = n_1 + n_2 + \dots + n_N$

Przejście do równania mKdV ($N = 2, \mu = \mathcal{F}_1 = 1, \mathcal{F}_2 = \lambda$):



$$(n_1, n_2) \rightarrow (t, x) = \left(\frac{\lambda - \lambda^2}{6} \Delta^3 n_1, \lambda \Delta n_1 + \Delta n_2 \right)$$

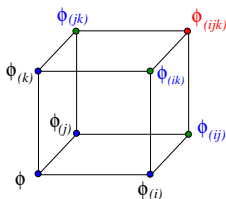
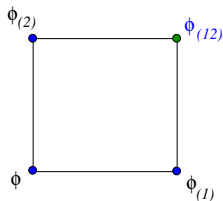
$$\Delta \rightarrow 0, \quad \phi_t + \phi_{xxx} - 3 \frac{\phi_{xx} \phi_x}{\phi} = 0, \quad v = \frac{\phi_x}{\phi}$$

$$v_t + v_{xxx} - 6v^2 v_x = 0$$

Wielowymiarowa konsystencja równania dmKdV

M. D. Kruskal (2004)

"For years we have been thinking that the integrable evolution equations were the fundamental ones. It is becoming clear now that the fundamental objects are the integrable *discrete* equations."

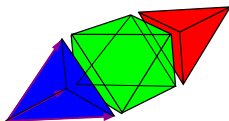


wielowymiarowa konsystencja

- zespół komutujących ze sobą symetrii
- transformacje Bäcklunda spełniające regułę przemienności superpozycji
- geometryczna interpretacja w postaci pewnych twierdzeń geometrii incydencyjnej

Równanie Hiroty – „octahedron recurrence”

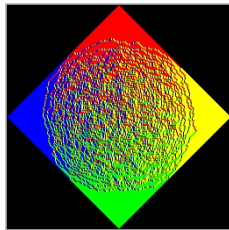
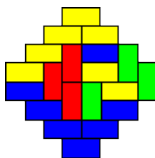
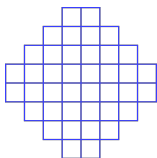
R. Hirota (1981)



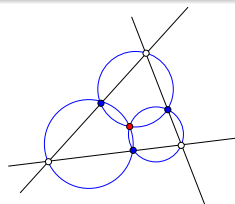
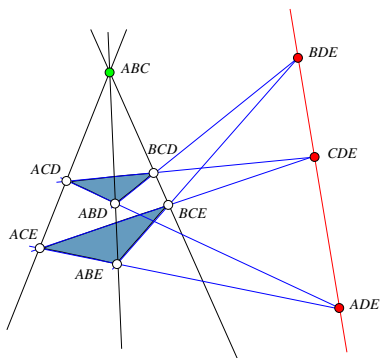
$$(A_j - A_k)\tau_{(i)}\tau_{(jk)} + (A_k - A_i)\tau_{(j)}\tau_{(ik)} + (A_i - A_j)\tau_{(k)}\tau_{(ij)} = 0$$

$\tau: \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{C}$, $A_i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ – funkcja zmiennej n_i , $1 \leq i < j < k \leq N$

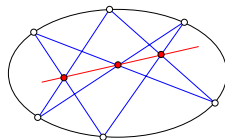
D. Speyer (2003)



Wielowymiarowa konsystencja równania Hiroyty jest konsekwencją twierdzenia Desarguesa



twierdzenie Miquela



twierdzenie Pascala

Równanie $q - P_{VI}$ jako redukcja równania Hiroty

M. Jimbo, H. Sakai (1996): q -dyskretne równanie Painlevé VI

$$f_n f_{n+1} = \frac{(g_n + t_n c_1)(g_n + t_n c_1^{-1})}{(g_n + c_2)(g_n + c_2^{-1})}, \quad f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$
$$g_n g_{n+1} = \frac{(f_{n+1} + t_n \sqrt{q} c_3)(f_{n+1} + t_n \sqrt{q} c_3^{-1})}{(f_{n+1} + c_4)(f_{n+1} + c_4^{-1})}$$

$t_{n+1} = q t_n$, c_1, c_2, c_3, c_4 – dowolne parametry

A. D. (2014): od równania Hiroty do $q - P_{VI}$

- redukcja 2-periodyczna równania Hiroty do d-mKdV:

$$\tau_{(N+1, N+1)} = m \tau, \quad m = m(n_1 + \dots + n_{N+1})$$

- redukcja samopodobna (2, 2) d-mKdV do $q - P_{VI}$: $\phi_{(1122)} = \phi$

P. A. Griffiths, *Mathematics At The Turn Of The Millenium*, Amer. Math. Soc. **107** (2000), 1–14

One of the most remarkable achievements of mathematics of the latter half of the 20th century is the theory of solitons, which illustrates the underlying unity of the field. These can be described as nonlinear waves that exhibit extremely unexpected and interesting behaviour. [...] This discovery provoked a rush of activity which exhibited in the most beautiful way the unity of mathematics. It involved developments in computation, and in mathematical analysis, which is the traditional way to study differential equations. It also turns out that one can understand the solutions to these differential equations through certain very elegant constructions in algebraic geometry. Additionally, the solutions are intimately related to representation theory, in that these equations turn out to have an infinite number of hidden symmetries. Finally, they relate back to problems in elementary geometry.