Równania różniczkowe cząstkowe
w teorii funkcji.
Dwa słynne problemy.

Michał Jasiczak

Horyzonty 2014

Podstawowy obiekt wykładu:

$\boxed{\text{funkcje holomorficzne wielu zmiennych}}$

Temat:
dwa problemy, których znane częściowe rozwiązania wykorzystują metody równań różniczkowych cząstkowych.

Definicja 1 *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem. Funkcję*

$$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$$

nazywamy funkcją holomorficzną, jeżeli dla każdego $j = 1, \dots, n$ i dla dowolnie ustalonych punktów $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n$ funkcja

$$z \mapsto f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n)$$

jest holomorficzna jako funkcja jednej zmiennej zespolonej, dla wszystkich

$$z \in \{z \in \mathbb{C}\colon (z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n) \in \Omega\}.$$

Definicja 2 *Mówimy, że funkcja*

$$f\colon D \to \mathbb{C}$$

określona na obszarze $D \subset \mathbb{C}$ jest holomorficzna w punkcie $z \in D$, jeżeli jest różniczkowalna w sensie zespolonym w punkcie z, to znaczy istnieje granica

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Funkcja f jest holomorficzna na obszarze D, jeżeli jest holomorficzna w każdym punkcie obszaru D.

Historycznie funkcje holomorficzne $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ były definiowane jako funkcje holomorficzne względem każdej zmiennej osobno i ograniczone na zbiorach zwartych. Z wzoru całkowego Cauchy'ego wynika, że są one klasy C^∞.

Z wzoru całkowego Cauchy'ego wynika, że są one klasy C^∞.

Twierdzenie 1 (Hartogs) *Funkcja holomorficzna* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *jest ciągła.*

Podobnie jak w przypadku funkcji holomorficznej jednej zmiennej.

Definicja 3 *Funkcja* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *jest holomorficzna, jeżeli dla kadego* $z^0 \in \Omega$ *można dobrać* $r = r(z^0)$ *tak, aby* $D^n(z^0, r) \subset \Omega$ *i aby* f *dała się przedstawić w postaci sumy bezwzględnie zbieżnego szeregu potęgowego*

$$f(z) = \sum_{\alpha} a_\alpha (z - z^0)^\alpha$$

dla $z \in D^n(z^0, r)$.

Podstawowa idea:

- Być może znane własności funkcji holomorficznych jednej zmiennej można w prosty sposób przenieść na przypadek funkcji holomorficznych wielu zmiennych.

Podstawowa idea:

- Być może znane własności funkcji holomorficznych jednej zmiennej można w prosty sposób przenieść na przypadek funkcji holomorficznych wielu zmiennych.

- Teoria funkcji wielu zmiennych jest znacznie bardziej "geometryczna".

Trzeba badać związki między trzema światami:

- zbiory, obszary, na których określone są funkcje,
- funkcje lub przestrzenie funkcji,
- operatory określone na przestrzeniach funkcji, na przykład operatory różniczkowe.

I Problem:

Problem Korony

Dla zadanych ograniczonych funkcji holomorficznych

$$f_1, \dots, f_k \colon \Omega \to \mathbb{C}$$

rozwiązać równanie

$$g_1 f_1 + \cdots + g_k f_k = 1$$

zwane równaniem Bézout.

Interesuje nas więc przestrzeń

$$H^\infty(\Omega)$$

ograniczonych funkcji holomorficznych na obszarze Ω.

Zauważmy, że jeżeli dla $f_1, \ldots, f_k \in H^\infty(\Omega)$ istnieją funkcje $g_1, \ldots, g_k \in H^\infty(\Omega)$, to

$$\begin{aligned} 1 &= \Big|\sum_{j=1}^{k} f_j g_j\Big| \\ &\le \Big(\sum_{j=1}^{k} |f_j|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^{k} |g_j|^2\Big)^{1/2} \\ &\le C\Big(\sum_{j=1}^{k} |f_j|^2\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Musi więc wtedy być

$$\Big(\sum_{j=1}^{k} |f_j(z)|^2\Big)^{1/2} \ge \frac{1}{C} > 0.$$

Faktycznie więc problem korony polega na znalezieniu dla zadanych funkcji $f_1, \ldots, f_k \in H^\infty(\Omega)$ spełniających warunek

$$\sum_{j=1}^{k} |f_j(z)| \geq \delta > 0,$$

dla pewnej liczby δ, funkcji

$$g_1, \ldots, g_k \in H^\infty(\Omega)$$

takich, że

$$\sum_{j=1}^{k} f_j(z) g_j(z) = 1.$$

Przestrzeń

$$H^{\infty}(\Omega)$$

jest algebrą Banacha.

To znaczy z normą

$$\|f\| := \sup_{z \in \Omega} |f(z)|$$

$H^{\infty}(\Omega)$ jest przestrzenią Banacha, z mnożeniem punktowym jest algebrą oraz mnożenie jest ciągłe

$$\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Niech

$$m\colon H^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$$

będzie funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym na $H^\infty(\Omega)$

$$m(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 m(f_1) + a_2 m(f_2),$$
$$m(f_1 \cdot f_2) = m(f_1) m(f_2),$$

$a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $f_1, f_2 \in H^\infty(\Omega)$.

Zbiór $\mathfrak{M}$ wszystkich funkcjonałów

$$m\colon H^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{C},$$

które są liniowo-multiplikatywne nazywa się przestrzenią ideałów maksymalnych.

Zbiór $\mathfrak{M}$ wszystkich funkcjonałów

$$m\colon H^\infty(\Omega) \to \mathbb{C},$$

które są liniowo-multiplikatywne nazywa się przestrzenią ideałów maksymalnych.

- m jest automatycznie ciągły,

Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między funkcjonałami liniowo-multyplikatywnymi, a ideałami maksymalnymi

$$m \leftrightarrow \ker m.$$

Na zbiorze $\mathfrak{M}$ istnieje naturalna topologia. Jest nią tak zwana $*$-słaba topologia.

W tej topologii sieć $m_\alpha \in \mathfrak{M}$ zbiega do $m \in \mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej funkcji $f \in H^\infty(\Omega)$

$$m_\alpha(f) \to m(f).$$

Dla dowolnego $z \in \Omega$ funkcjonał

$$m_z \colon H^\infty(\Omega) \ni f \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$$

jest liniowy, multyplikatywny i ciągły.

To oznacza, że

$$\Omega \hookrightarrow \mathfrak{M}.$$

Równoważne sformułowanie problemu korony:

Czy zbiór Ω jest gęsty w $\mathfrak{M}$?

Równoważne sformułowanie problemu korony:

Czy zbiór Ω jest gęsty w $\mathfrak{M}$?

- TAK dla dysku $\mathbb{D}$ – L. Carleson (1962), dowód oparty na analizie funkcjonalnej L. Hörmander, znacznie prostszy dowód pochodzi z 1980 roku od Wolffa.

- Nie jest znana odpowiedź dla podstawowych obszarów w $\mathbb{C}^n$ takich jak kula $\mathbb{B}^n$, czy polidysk

$$\mathbb{P}^n = \Big\{ z \in \mathbb{C}^n \colon |z_j| < 1, j = 1, \ldots, n \Big\}.$$

Niech $f_1, f_2 \in H^\infty(\Omega)$ spełniają warunek

$$|f_1(z)| + |f_2(z)| \geq \delta > 0.$$

Możemy przyjąć:

$$\gamma_1 := \frac{\bar{f}_1(z)}{|f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2}$$
$$\gamma_2 := \frac{\bar{f}_2(z)}{|f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2}.$$

Wówczas oczywiście:

$$\boxed{\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 = 1.}$$

Funkcje γ_1, γ_2 nie są jednak oczywiście holomorficzne. Są jednak gładkie.

Pomysł polega poprawieniu γ_1, γ_2.

Przyjmijmy:

$$g_1 := \gamma_1 + uf_2$$
$$g_2 := \gamma_2 - uf_1.$$

Wówczas oczywiście dla dowolnej funkcji u

$$\begin{aligned} f_1 g_1 + f_2 g_2 &= f_1\gamma_1 + f_2\gamma_2 + f_1 u f_2 - f_1 u f_2 \\ &= f_1\gamma_1 + f_2\gamma_2 = 1. \end{aligned}$$

Musimy więc wybrać u tak, aby g_1, g_2 były holomorficzne.

Tutaj wkraczają równania różniczkowe cząstkowe!

Funkcje holomorficzne można zdefiniować jako rozwiązania równań Cauchy'ego-Riemanna.

Zdefiniujmy dla $f\colon D \to \mathbb{C}$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\Big) f.$$

Funkcja $f\colon D \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.}$$

Podobnie funkcja $f\colon \mathbb{C}^n \supset \Omega \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} = 0,$$
$$\dots$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_n} = 0.$$

Przypomnijmy, że szukamy u takiego, aby

$$g_1 := \gamma_1 + u f_2$$

była holomorficzna. Musi więc być

$$\frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Prowadzi to do następującego problemu:

Rozwiązać równanie (lub w $\mathbb{C}^n$ układ równań) postaci:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = V.}$$

Oczywiście

$$g_1 := \gamma_1 + uf_2$$

ma być funkcją ograniczoną. Szukamy więc ograniczonego rozwiązania równań

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = V.$$

Podstawowy więc problem jakie jest V.

Okazuje się, że prawa strona definiuje tak zwaną miarę Carlesona. Dodatnia miara borelowska na dysku $\mathbb{D}$ jest miarą Carlesona, jeżeli:

$$\mu(S(\theta_0, \varepsilon)) \leq C\varepsilon,$$

gdzie:

$$S(\theta_0, \varepsilon) = \left\{ re^{\sqrt{-1}\theta} \colon |\theta - \theta_0| < \varepsilon, |1 - r| \leq \varepsilon \right\}.$$

Podobny problem na obszarach w $\mathbb{C}^n, n > 1$ prowadzi do problemów, które nie są izotropowe.

To znaczy odpowiedniki obszarów $S(\theta_0, \varepsilon)$ mają różne własności, w szczególności wymiary, w zależności od kierunku.

Skąd się bierze nieizotropowa natura problemów w $\mathbb{C}^n, n > 1$?

Jeżeli dla $z_0 \in \Omega$, $v \in \mathbb{C}^n$ oraz $r > 0$

$$D(z_0, v, r) := \left\{ z_0 + \lambda v \colon \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < r \right\} \subset \Omega$$

to wzór całkowy Cauchy'ego

$$f^{'}(z_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial D(z_0,v,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta$$

da oszacowanie

$$|f^{'}(z_0)| \lesssim \frac{\|f\|_{H^\infty}}{r}.$$

Podsumowując:

Metoda rozwiązania problemu korony w $\mathbb{C}^n, n > 1$ prowadzi do układu równań postaci

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = V_j,$$

$j = 1, \ldots, n$, które trzeba rozwiązać znajdując rozwiązanie ograniczone. Prawa strona

$$(V_1, \ldots, V_n)$$

spełnia pewne geometryczne oszacowania nieizotropowej natury.

Znane metody dają rozwiązania w większych przestrzeniach takich jak przestrzenie Hardy'ego $H^p, 1 \leq p < \infty$, przestrzeń BMOA funkcji holomorficznych o ograniczonej oscylacji na brzegu lub przestrzenie funkcji o wzroście logarytmicznym:

$$|f(z)| \leq C\Big|\log(1 - |z|)\Big|^k$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0$.

Problem II:

Zasada odpowiedniości brzegów Carathéodory'ego:

Twierdzenie 2 *Niech obszary D_1, D_2 będą ograniczone krzywymi Jordana $\partial D_1, \partial D_2$. Wówczas przekształcenie biholomorficzne $f\colon D_1 \to D_2$ można przedłużyć na brzeg obszaru D_1 do homeomorfizmu obszarów domkniętych $\bar{D}_1$ i $\bar{D}_2$.*

Niech $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$ będą ograniczonymi obszarami o gładkich brzegach. Czy biholomorfizm

$$F \colon \Omega_1 \to \Omega_2$$

przedłuża się do dyfeomorfizmu domknięć obszarów $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2$?

Rozwiązanie tego problemu pozwoliłoby przyporządkować obszarowi Ω pewne niezmienniki zdefiniowane dla punktów należących do brzegu $\partial\Omega$. To z kolei pozwoliłoby myśleć o klasyfikacji obszarów ze względu na relację bycia biholomorficznym.

Twierdzenie 3 (Riemann) *Dowolny obszar jednospójny, którego brzeg składa się z więcej niż jednego punktu, jest biholomorficzny z dyskiem.*

Problem istnienia rozszerzenia biholomorfizmu jest rozwiązany dla obszarów silnie pseudowypukłych – Fefferman 1974.

Inna idea (Bell, Ligocka 1980): wykorzystać przestrzenie Sobolewa

Przestrzeń Sobolewa

$$W_k(\Omega) := \Big\{ u \in L^2(\Omega) \colon D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \le k \Big\}.$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Dla funkcji ciągłej $u \in C(\bar{\Omega})$ ma sens odwzorowanie

$$u \mapsto u|_{\partial\Omega}$$

$$u|_{\partial\Omega}$$

to ślad funkcji u.

Podobnie dla odpowiednio dużego k funkcje z przestrzeni Sobolewa $W_k(\Omega)$ też mają ślady!

Pomysł: Wykorzystajmy ślad w sensie teorii przestrzeni Sobolewa jako rozszerzenie biholomorfizmu!

Zamiast badać równanie

$$\overline{\partial} u = V$$

łatwiej jest badać równanie

$$(\overline{\partial}^* \overline{\partial} + \overline{\partial} \overline{\partial}^*) u = f.$$

Aby skonstruować rozszerzenie trzeba zbadać własności

$$\overline{\partial}^* \overline{\partial} + \overline{\partial} \overline{\partial}^*$$

na przestrzeniach Sobolewa.

$\overline{\partial}^*$ to operator formalnie sprzężony z $\overline{\partial}$

$$\int_\Omega \overline{\partial}^* u \bar{v} dx = \int_\Omega u \wedge \star \overline{\overline{\partial} v}$$

dla u, v o zwartym nośniku zawartym w Ω, czyli

$$(\overline{\partial}^* u, v) = (u, \overline{\partial} v).$$

Operator

$$\Box = \overline{\partial}^* \overline{\partial} + \overline{\partial}\overline{\partial}^*$$

to w zasadzie laplasjan

$$\Delta = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Rozważmy równanie

$$Lu = f,$$

gdzie

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + c(x) u.$$

Na przykład Laplasjan Δ.

Wówczas, jeżeli $f \in W_k(\Omega)$ oraz

$$Lu = f,$$

to

$$u \in W_{k+2,loc}(\Omega),$$

gdy $a^{ij}, b^i, c \in C^{k+1}(\Omega)$.

Rozwiązanie u ma więc lepsze własności od prawej strony równania $Lu = f$.

Być może tę samą własność ma nasze równanie

$$(\overline{\partial}^*\overline{\partial} + \overline{\partial}\overline{\partial}^*)u = f.$$

Jeżeli Ω jest obszarem skończonego typu, to zachodzą oszacowania subeliptyczne

$$\|u\|_{\varepsilon}^{2} \leq C\Big(\|\overline{\partial} u\|^{2} + \|\overline{\partial}^{*} u\|^{2} + \|u\|^{2}\Big)$$

dla $\varepsilon > 0$.

Zatem dla obszarów skończonego typu mamy rozszerzenia biholomorfizmów.

Przykłady obszarów skończonego typu:

$$\{z \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1|^4 + |z_2|^6 < 1\}$$
$$\{2\Re z_3 + |z_1^2 - z_2^3|^2 + |z_1|^8 + |z_1|^{18} - |z_2|^{12} < 1\}$$