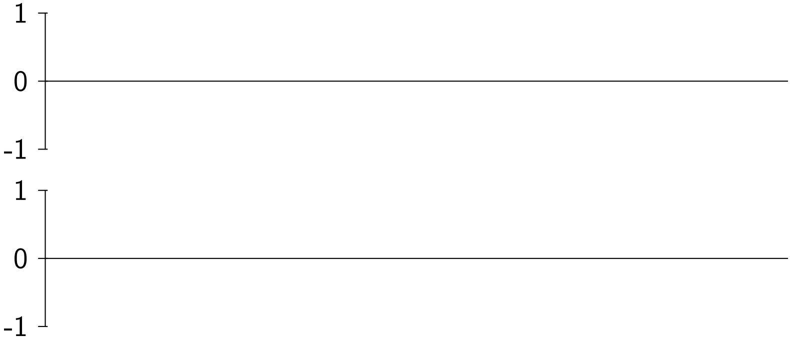
Entropia i niezależność kombinatoryczna w dynamice symbolicznej

Dominik Kwietniak

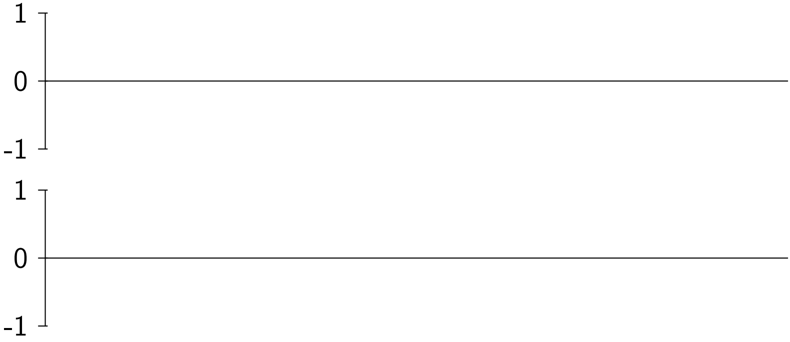
JAGIELLONIAN UNIVERSITY IN KRAKOW

Będlewo, 20 marca, 2014

Zagadka

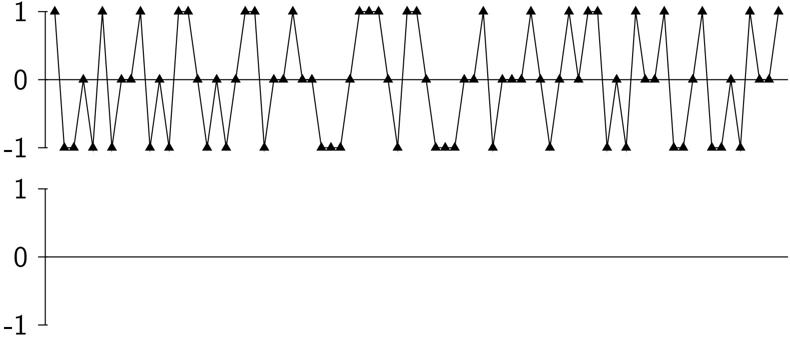


Zagadka



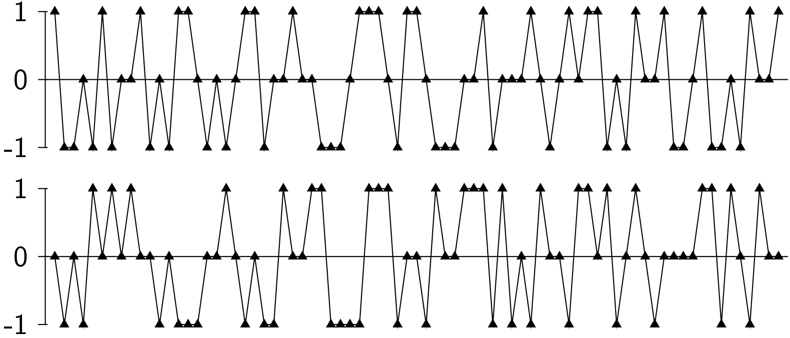
Który z powyższych ciągów został wygenerowany losowo?

Zagadka



Który z powyższych ciągów został wygenerowany losowo?

Zagadka



Który z powyższych ciągów został wygenerowany losowo?

Funkcja Möbiusa

Liczba całkowita d jest bezkwadratowa jeśli nie jest ona podzielna przez kwadratej żadnej liczby pierwszej.

Funkcja Möbiusa

Liczba całkowita d jest bezkwadratowa jeśli nie jest ona podzielna przez kwadratej żadnej liczby pierwszej. Niech $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Dla $n \geqslant 2$ niech $\langle n \rangle$ oznaczma liczbę różnych dzielników pierwszych n.

Funkcja Möbiusa

Liczba całkowita d jest bezkwadratowa jeśli nie jest ona podzielna przez kwadratej żadnej liczby pierwszej. Niech $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Dla $n \geqslant 2$ niech $\langle n \rangle$ oznaczma liczbę różnych dzielników pierwszych n. Funkcją Möbiusa nazywamy funkcję $\mu\colon \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ daną wzorem

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } n = 1, \\ 0, & \text{jeśli } n \text{ nie jest bezkwadratowa}, \\ (-1)^{\langle n \rangle}, & \text{jeśli } n \text{ jest bezkwadratowa}. \end{cases}$$

Funkcja Möbiusa

Liczba całkowita d jest bezkwadratowa jeśli nie jest ona podzielna przez kwadratej żadnej liczby pierwszej. Niech $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Dla $n \geqslant 2$ niech $\langle n \rangle$ oznaczma liczbę różnych dzielników pierwszych n. Funkcją Möbiusa nazywamy funkcję $\mu\colon \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ daną wzorem

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } n = 1, \\ 0, & \text{jeśli } n \text{ nie jest bezkwadratowa}, \\ (-1)^{\langle n \rangle}, & \text{jeśli } n \text{ jest bezkwadratowa.} \end{cases}$$

Czy ciąg jest $(\mu(n))_{n=1}^{\infty}$ losowy?

Entropia ciągu — miara losowości

Entropia ciągu — miara losowości

Definicja

Niech $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, r-1\}$. Słowem (blokiem) nad $\mathcal{A}$ nazywamy każdy skończony ciąg elementów $\mathcal{A}$. n-słowo to słowo długości n.

Entropia ciągu — miara losowości

Definicja

Niech $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, r-1\}$. Słowem (blokiem) nad $\mathcal{A}$ nazywamy każdy skończony ciąg elementów $\mathcal{A}$. *n-słowo* to słowo długości n.

Entropia ciągu — miara losowości

Definicja

Niech $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, r - 1\}$. Słowem (blokiem) nad $\mathcal{A}$ nazywamy każdy skończony ciąg elementów $\mathcal{A}$. n-słowo to słowo długości n. Zbiór wszystkich słów nad $\mathcal{A}$ oznaczamy $\mathcal{A}^*$.

Entropia ciągu — miara losowości

Definicja

Niech $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, r-1\}$. Słowem (blokiem) nad $\mathcal{A}$ nazywamy każdy skończony ciąg elementów $\mathcal{A}$. n-słowo to słowo długości n. Zbiór wszystkich słów nad $\mathcal{A}$ oznaczamy $\mathcal{A}^*$. Mówimy, że słowo $w \in \mathcal{A}^*$ występuje w ciągu $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ jeśli $w = x_{[i,j]}$ dla pewnych $1 \leqslant i \leqslant j < \infty$, gdzie

$$\ldots x_{i-1} \underbrace{\boxed{x_i \; x_{i+1} \ldots x_{j-1} \; x_j}}_{x_{[i,j]}} x_{j+1} \ldots$$

Entropia ciągu — miara losowości

Entropia ciągu — miara losowości

Definicja

Język ciągu $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ to zbiór $\mathcal{B}(x)$ złożonych z wszystkich słów, które występują w x.

Entropia ciągu — miara losowości

Definicja

Język ciągu $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ to zbiór $\mathcal{B}(x)$ złożonych z wszystkich słów, które występują w x. Język zbioru $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ to zbiór $\mathcal{B}(X)$ złożonych z wszystkich słów, które występują w jakimś $x \in X$.

Entropia ciągu — miara losowości

Definicja

Język ciągu $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ to zbiór $\mathcal{B}(x)$ złożonych z wszystkich słów, które występują w x. Język zbioru $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ to zbiór $\mathcal{B}(X)$ złożonych z wszystkich słów, które występują w jakimś $x \in X$. Zbiór $\mathcal{B}_n(X)$ złożony jest z słów długości n zawartych w $\mathcal{B}(X)$.

Entropią topologiczna ciągu

Entropią topologiczna ciągu

Definicja

Entropią zbioru $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ nazywamy liczbę

$$h(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{B}_n(X)| = \inf_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \log |\mathcal{B}_n(X)|.$$

Istnienie granicy

Istnienie granicy

Lemat

Jeżeli ciąg liczb nieujemnych $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jest subaddytywny* ($a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$)*, to jest zbieżny i jego granica jest równa jego infimum, czyli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}.$$

Istnienie granicy

Lemat

Jeżeli ciąg liczb nieujemnych $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jest subaddytywny* ($a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$)*, to jest zbieżny i jego granica jest równa jego infimum, czyli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}.$$

Lemat

Jeśli $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$*, to* $|\mathcal{B}_{n+m}(X)| \leqslant |\mathcal{B}_m(X)| \cdot |\mathcal{B}_n(X)|$.

Istnienie granicy

Lemat

Jeżeli ciąg liczb nieujemnych $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jest subaddytywny* ($a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$)*, to jest zbieżny i jego granica jest równa jego infimum, czyli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}.$$

Lemat

Jeśli $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$*, to* $|\mathcal{B}_{n+m}(X)| \leqslant |\mathcal{B}_m(X)| \cdot |\mathcal{B}_n(X)|$.

Dowód.

Niech $w = (x_1 \ldots x_{n+m}) \in \mathcal{B}_{n+m}$:

$\square$

Istnienie granicy

Lemat

Jeżeli ciąg liczb nieujemnych $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jest subaddytywny* ($a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$)*, to jest zbieżny i jego granica jest równa jego infimum, czyli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}.$$

Lemat

Jeśli $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$*, to* $|\mathcal{B}_{n+m}(X)| \leqslant |\mathcal{B}_m(X)| \cdot |\mathcal{B}_n(X)|$.

Dowód.

Niech $w = (x_1 \ldots x_{n+m}) \in \mathcal{B}_{n+m}$:

$$w = \underbrace{\boxed{x_1\ x_2 \ldots x_{n-1}\ x_n}}_{x_{[1,n]} \in \mathcal{B}_n(X)} \underbrace{\boxed{x_{n+1}\ x_{n+2} \ldots x_{n+m-1}\ x_{n+m}}}_{x_{[n+1,n+m]} \in \mathcal{B}_m(X)}$$

□

Ciągi deterministyczne

Ciągi deterministyczne

Definicja

Mówimy, że ciąg $x = x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ jest deterministyczny jeżeli $h(x) = 0$.

Ciągi deterministyczne

Definicja

Mówimy, że ciąg $x = x_1 x_2 \dots x_n \dots$ jest deterministyczny jeżeli $h(x) = 0$.

Przykład

Każdy ciąg okresowy jest deterministyczny.

Ciągi deterministyczne

Definicja

Mówimy, że ciąg $x = x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ jest deterministyczny jeżeli $h(x) = 0$.

Przykład

Każdy ciąg okresowy jest deterministyczny.

Przykład

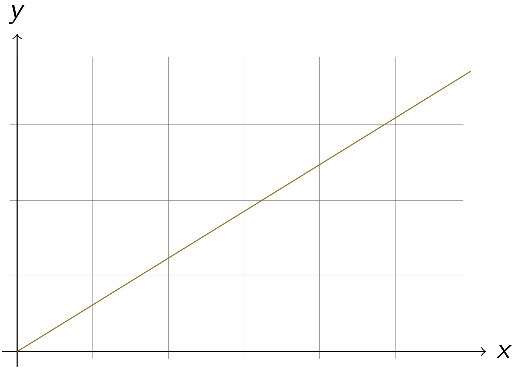
Ciąg wygenerowany przy pomocy symetrycznej monety nie jest deterministyczny — z prawdopodobieństwem 1 zachodzi $h(x) = \log 2$.

Ciągi deterministyczne

Ciągi deterministyczne

Przykład

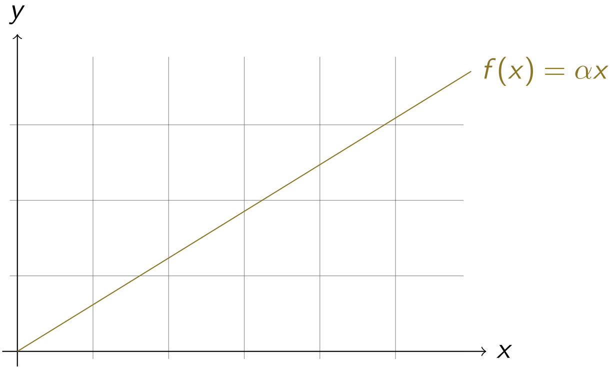
Niech $\alpha \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Q}$.



Ciągi deterministyczne

Przykład

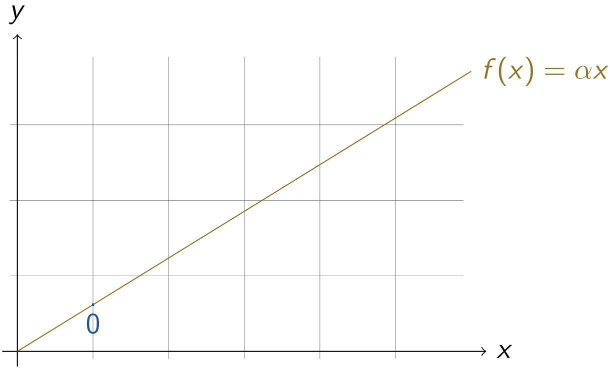
Niech $\alpha \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Q}$.



Ciągi deterministyczne

Przykład

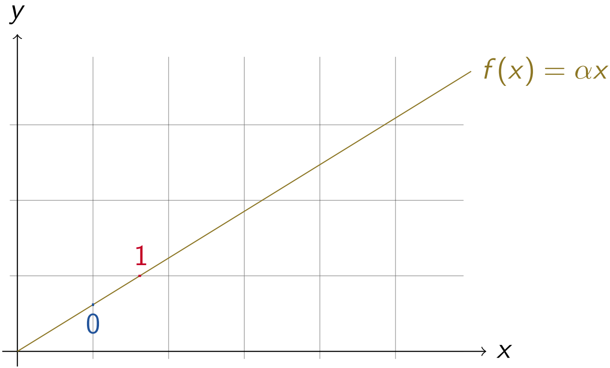
Niech $\alpha \in (0,\infty) \setminus \mathbb{Q}$.



Ciągi deterministyczne

Przykład

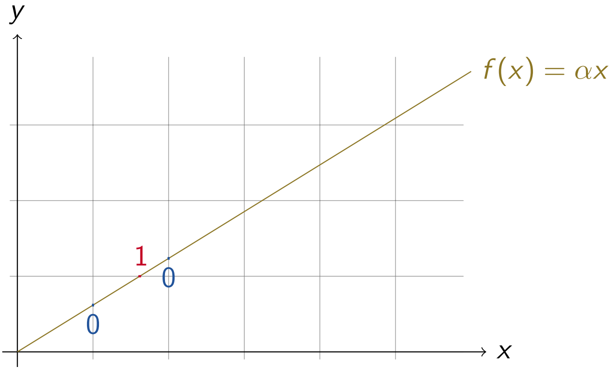
Niech $\alpha \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Q}$.



Ciągi deterministyczne

Przykład

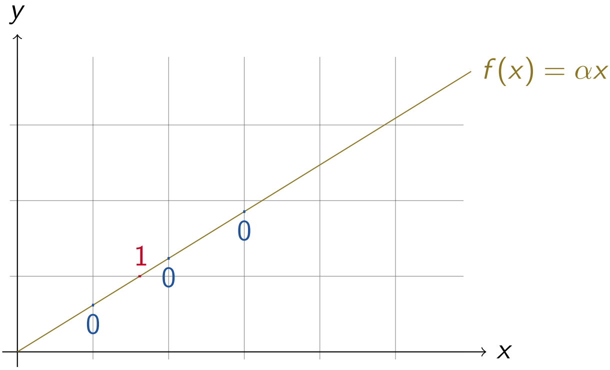
Niech $\alpha \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Q}$.



Ciągi deterministyczne

Przykład

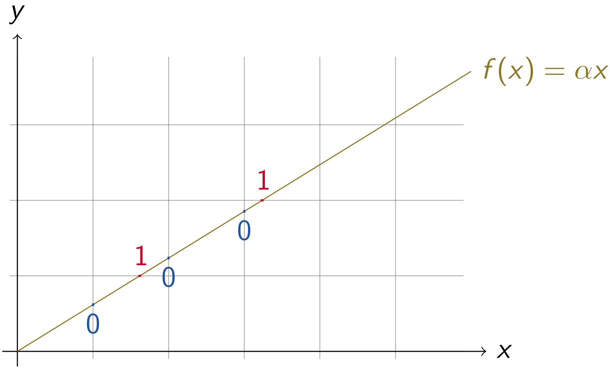
Niech $\alpha \in (0,\infty) \setminus \mathbb{Q}$.



Ciągi deterministyczne

Przykład

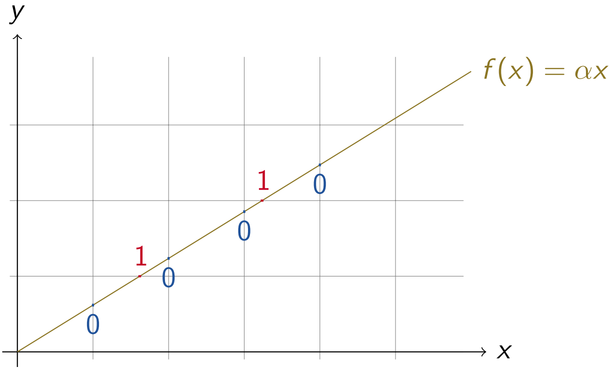
Niech $\alpha \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Q}$.



Ciągi deterministyczne

Przykład

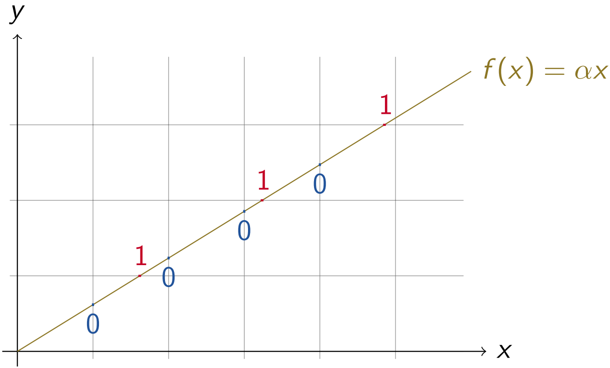
Niech $\alpha \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Q}$.



Ciągi deterministyczne

Przykład

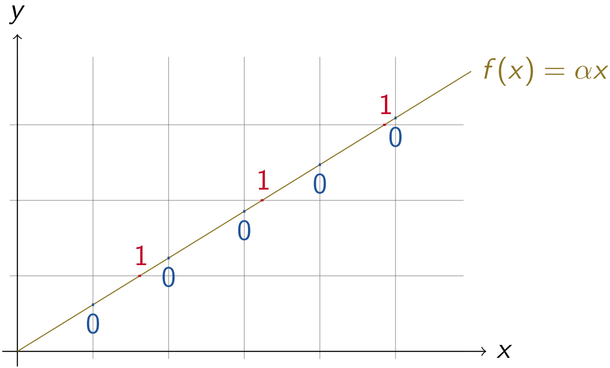
Niech $\alpha \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Q}$.



Ciągi deterministyczne

Przykład

Niech $\alpha \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Q}$.



Hipoteza Sarnaka

Hipoteza Sarnaka

Hipoteza Sarnaka

Dla każdego ciągu deterministycznego $(\xi(n))_{n=1}^{\infty}$ zachodzi

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu(n)\xi(n)\to 0 \quad N\to\infty.$$

Shifty

Shifty

Definicja

Pełnym r-shiftem nazywamy

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathcal{A} \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n,$$

Shifty

Definicja

Pełnym r-shiftem nazywamy

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathcal{A} \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

Przesunięcie $\sigma\colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ odwzorowuje $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ na $\sigma(x) = (x_{i+1})_{i=1}^{\infty}$.

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n,$$

Shifty

Definicja

Pełnym r-shiftem nazywamy

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathcal{A} \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

Przesunięcie $\sigma\colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ odwzorowuje $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ na $\sigma(x) = (x_{i+1})_{i=1}^{\infty}$.

$$x = \overset{(1)}{x_1}, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n,$$

Shifty

Definicja

Pełnym *r*-shiftem nazywamy

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathcal{A} \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

Przesunięcie $\sigma \colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ odwzorowuje $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ na $\sigma(x) = (x_{i+1})_{i=1}^{\infty}$.

$$x = \overset{(1)}{x_1}, \overset{(2)}{x_2}, x_3, x_4, \ldots, x_n,$$

Shifty

Definicja

Pełnym *r*-shiftem nazywamy

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathcal{A} \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

Przesunięcie $\sigma \colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ odwzorowuje $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ na $\sigma(x) = (x_{i+1})_{i=1}^{\infty}$.

$$x = \overset{(1)}{x_1},\ \overset{(2)}{x_2},\ \overset{(3)}{x_3},\ x_4,\ \ldots,\ x_n,$$

Shifty

Definicja

Pełnym r-shiftem nazywamy

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathcal{A} \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

Przesunięcie $\sigma \colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ odwzorowuje $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ na $\sigma(x) = (x_{i+1})_{i=1}^{\infty}$.

$$x = \overset{(1)}{x_1}, \overset{(2)}{x_2}, \overset{(3)}{x_3}, \overset{(4)}{x_4}, \ldots, x_n,$$

Shifty

Definicja

Pełnym r-shiftem nazywamy

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathcal{A} \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

Przesunięcie $\sigma \colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ odwzorowuje $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ na $\sigma(x) = (x_{i+1})_{i=1}^{\infty}$.

$$x = \overset{(1)}{x_1}, \overset{(2)}{x_2}, \overset{(3)}{x_3}, \overset{(4)}{x_4}, \ldots, \overset{(n)}{x_n},$$

Shifty

Definicja

Pełnym r-shiftem nazywamy

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathcal{A} \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

Przesunięcie $\sigma\colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ odwzorowuje $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ na $\sigma(x) = (x_{i+1})_{i=1}^{\infty}$.

$$x = \overset{(1)}{x_1}, \overset{(2)}{x_2}, \overset{(3)}{x_3}, \overset{(4)}{x_4}, \dots, \overset{(n)}{x_n},$$

$$\sigma(x) = x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_{n+1}, \dots$$

Shifty

Definicja

Pełnym r-shiftem nazywamy

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathcal{A} \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

Przesunięcie $\sigma\colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ odwzorowuje $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ na $\sigma(x) = (x_{i+1})_{i=1}^{\infty}$.

$$x = \overset{(1)}{x_1}, \overset{(2)}{x_2}, \overset{(3)}{x_3}, \overset{(4)}{x_4}, \ldots, \overset{(n)}{x_n},$$

$$\sigma(x) = x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_{n+1}, \ldots$$

Shifty

Definicja

Pełnym r-shiftem nazywamy

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathcal{A} \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

Przesunięcie $\sigma\colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ odwzorowuje $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ na $\sigma(x) = (x_{i+1})_{i=1}^{\infty}$.

$$x = \overset{(1)}{x_1}, \overset{(2)}{x_2}, \overset{(3)}{x_3}, \overset{(4)}{x_4}, \ldots, \overset{(n)}{x_n},$$

$$\sigma(x) = x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_{n+1}, \ldots$$

Shifty

Definicja

Pełnym r-shiftem nazywamy

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathcal{A} \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

Przesunięcie $\sigma \colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ odwzorowuje $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ na $\sigma(x) = (x_{i+1})_{i=1}^{\infty}$.

$$\begin{aligned} x &= \overset{(1)}{x_1}, \overset{(2)}{x_2}, \overset{(3)}{x_3}, \overset{(4)}{x_4}, \ldots, \overset{(n)}{x_n}, \\ \sigma(x) &= x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_{n+1}, \ldots \end{aligned}$$

Shifty

Definicja

Pełnym r-shiftem nazywamy

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathcal{A} \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

Przesunięcie $\sigma\colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ odwzorowuje $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ na $\sigma(x) = (x_{i+1})_{i=1}^{\infty}$.

$$x = \overset{(1)}{x_1}, \overset{(2)}{x_2}, \overset{(3)}{x_3}, \overset{(4)}{x_4}, \dots, \overset{(n)}{x_n},$$
$$\sigma(x) = x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_{n+1}, \dots$$

Shift to każdy σ-niezmienniczy ($\sigma(X) \subset X$) i domknięty podzbiór $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Shifty

Definicja

Pełnym *r*-shiftem nazywamy

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathcal{A} \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

Przesunięcie $\sigma \colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ odwzorowuje $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ na $\sigma(x) = (x_{i+1})_{i=1}^{\infty}$.

$$\begin{aligned} x &= \overset{(1)}{x_1}, \overset{(2)}{x_2}, \overset{(3)}{x_3}, \overset{(4)}{x_4}, \ldots, \overset{(n)}{x_n}, \\ \sigma(x) &= x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_{n+1}, \ldots \end{aligned}$$

Shift to każdy σ-niezmienniczy ($\sigma(X) \subset X$) i domknięty podzbiór $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Shifty

Definicja

Pełnym *r*-shiftem nazywamy

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathcal{A} \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

Przesunięcie $\sigma\colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ odwzorowuje $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ na $\sigma(x) = (x_{i+1})_{i=1}^{\infty}$.

$$\begin{aligned} x &= \overset{(1)}{x_1}, \overset{(2)}{x_2}, \overset{(3)}{x_3}, \overset{(4)}{x_4}, \ldots, \overset{(n)}{x_n}, \\ \sigma(x) &= x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_{n+1}, \ldots \end{aligned}$$

Shift to każdy σ-niezmienniczy ($\sigma(X) \subset X$) i domknięty podzbiór $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Shifty

Definicja

Pełnym *r-shiftem* nazywamy

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathcal{A} \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

Przesunięcie $\sigma\colon \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ odwzorowuje $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ na $\sigma(x) = (x_{i+1})_{i=1}^{\infty}$.

$$\begin{aligned} x &= \overset{(1)}{x_1}, \overset{(2)}{x_2}, \overset{(3)}{x_3}, \overset{(4)}{x_4}, \ldots, \overset{(n)}{x_n}, \\ \sigma(x) &= x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_{n+1}, \ldots \end{aligned}$$

Shift to każdy σ-niezmienniczy ($\sigma(X) \subset X$) i domknięty podzbiór $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Shifty a słowa zakazane

Shifty a słowa zakazane

Lemat

Zbiór $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *jest shiftem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki zbiór* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}^*$*, że*

$$X = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : \mathcal{B}(x) \cap \mathcal{F} = \emptyset\}.$$

Shifty a słowa zakazane

Lemat

Zbiór $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ jest shiftem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki zbiór $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}^*$, że

$$X = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : \mathcal{B}(x) \cap \mathcal{F} = \emptyset\}.$$

Definicja

Zbiór $\mathcal{F}$ nazywamy zbiorem słów zakazanych dla X.

Shifty a języki

Shifty a języki

Lemat

Jeżeli $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ jest shiftem, to $\mathcal{B}(X)$ spełnia następujące warunki

Shifty a języki

Lemat

Jeżeli $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ jest shiftem, to $\mathcal{B}(X)$ spełnia następujące warunki

1. *$\mathcal{B}(X)$ jest faktorialny, tzn. jeżeli $u \in \mathcal{B}(X)$, to każde podsłowo u też należy do $\mathcal{B}(X)$.*

Shifty a języki

Lemat

Jeżeli $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ jest shiftem, to $\mathcal{B}(X)$ spełnia następujące warunki

1. *$\mathcal{B}(X)$ jest faktorialny, tzn. jeżeli $u \in \mathcal{B}(X)$, to każde podsłowo u też należy do $\mathcal{B}(X)$.*
2. *$\mathcal{B}(X)$ jest rozszerzalny, tzn. jeżeli $u \in \mathcal{B}(X)$, to istnieje taki symbol $\alpha \in \mathcal{A}$, że $u\alpha \in \mathcal{B}(X)$.*

Shifty a języki

Lemat

Jeżeli $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *jest shiftem, to* $\mathcal{B}(X)$ *spełnia następujące warunki*

1. $\mathcal{B}(X)$ *jest faktorialny, tzn. jeżeli* $u \in \mathcal{B}(X)$*, to każde podsłowo* u *też należy do* $\mathcal{B}(X)$*.*
2. $\mathcal{B}(X)$ *jest rozszerzalny, tzn. jeżeli* $u \in \mathcal{B}(X)$*, to istnieje taki symbol* $\alpha \in \mathcal{A}$*, że* $u\alpha \in \mathcal{B}(X)$*.*

Lemat

Jeżeli $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}^*$ *jest rozszerzalny i faktorialny, to istnieje taki shift* $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$*, że* $\mathcal{B}(X) = \mathcal{L}$*.*

Od ciągów do układów dynamicznych

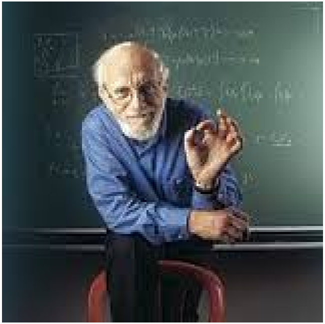
Mając dany ciąg $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ rozpatrujemy shift X, który jest domknięciem orbity punktu x względem σ, tzn.

$$X = \overline{\{\sigma^n(x) : n \geqslant 0\}}.$$

Od ciągów do układów dynamicznych

Mając dany ciąg $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ rozpatrujemy shift X, który jest domknięciem orbity punktu x względem σ, tzn.

$$X = \overline{\{\sigma^n(x) : n \geqslant 0\}}.$$



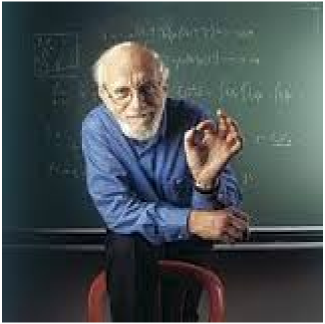
Od ciągów do układów dynamicznych

Mając dany ciąg $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ rozpatrujemy shift X, który jest domknięciem orbity punktu x względem σ, tzn.

$$X = \overline{\{\sigma^n(x) : n \geqslant 0\}}.$$

Definicja

Potok bezkwadratowy to shift zadany przez ciąg $\eta(n) = \mu^2(n)$.



Shift podporządkowany

Shift podporządkowany

Definicja

Słowo $w = w_1 \ldots w_k \in \mathcal{A}^*$ $(x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}})$ dominuje slowo $v = v_1 \ldots v_k \in \mathcal{A}^*$ $(y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}})$ jeśli $v_i \leqslant w_i$ dla $i = 1, \ldots, k$ $(y_i \leqslant x_i$ for $i \in \mathbb{N})$.

Shift podporządkowany

Definicja

Słowo $w = w_1 \dots w_k \in \mathcal{A}^*$ $(x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}})$ dominuje slowo $v = v_1 \dots v_k \in \mathcal{A}^*$ $(y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}})$ jeśli $v_i \leqslant w_i$ dla $i = 1, \dots, k$ $(y_i \leqslant x_i$ for $i \in \mathbb{N})$.

Shift podporządkowany

Definicja

Słowo $w = w_1 \dots w_k \in \mathcal{A}^*$ ($x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$) dominuje slowo $v = v_1 \dots v_k \in \mathcal{A}^*$ ($y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$) jeśli $v_i \leqslant w_i$ dla $i = 1, \dots, k$ ($y_i \leqslant x_i$ for $i \in \mathbb{N}$).

Definicja

Niech $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}^*$, Zbiór wszystkich słów zdominowanych przez jakieś słowo z $\mathcal{L}$ oznaczamy $\mathcal{L}^{\leqslant}$.

Shift podporządkowany

Definicja

Słowo $w = w_1 \dots w_k \in \mathcal{A}^*$ ($x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$) dominuje slowo $v = v_1 \dots v_k \in \mathcal{A}^*$ ($y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$) jeśli $v_i \leqslant w_i$ dla $i = 1, \dots, k$ ($y_i \leqslant x_i$ for $i \in \mathbb{N}$).

Definicja

Niech $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}^*$, Zbiór wszystkich słów zdominowanych przez jakieś słowo z $\mathcal{L}$ oznaczamy $\mathcal{L}^{\leqslant}$.

Definicja

Niech $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Shiftem podporządkowanym x nazywamy shift $X^{\leqslant x}$ zadany przez język $\mathcal{B}(x)^{\leqslant}$.

Shift podporządkowany

Definicja

Słowo $w = w_1 \dots w_k \in \mathcal{A}^*$ ($x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$) dominuje slowo $v = v_1 \dots v_k \in \mathcal{A}^*$ ($y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$) jeśli $v_i \leqslant w_i$ dla $i = 1, \dots, k$ ($y_i \leqslant x_i$ for $i \in \mathbb{N}$).

Definicja

Niech $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}^*$, Zbiór wszystkich słów zdominowanych przez jakieś słowo z $\mathcal{L}$ oznaczamy $\mathcal{L}^{\leqslant}$.

Definicja

Niech $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Shiftem podporządkowanym x nazywamy shift $X^{\leqslant x}$ zadany przez język $\mathcal{B}(x)^{\leqslant}$.

Shift podporządkowany

Definicja

Słowo $w = w_1 \ldots w_k \in \mathcal{A}^*$ ($x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$) dominuje slowo $v = v_1 \ldots v_k \in \mathcal{A}^*$ ($y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$) jeśli $v_i \leqslant w_i$ dla $i = 1, \ldots, k$ ($y_i \leqslant x_i$ for $i \in \mathbb{N}$).

Definicja

Niech $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}^*$, Zbiór wszystkich słów zdominowanych przez jakieś słowo z $\mathcal{L}$ oznaczamy $\mathcal{L}^{\leqslant}$.

Definicja

Niech $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Shiftem podporządkowanym x nazywamy shift $X^{\leqslant x}$ zadany przez język $\mathcal{B}(x)^{\leqslant}$.

(Uwaga: shifty podporządkowane są *dziedziczne*.)

Przykłady

Przykłady

Lemat

Potok bezkwadratowy jest shiftem podporządkowanym.

Przykłady

Lemat

Potok bezkwadratowy jest shiftem podporządkowanym.

Wniosek: chaos...

Entropia

Twierdzenie

Dla każdego $t \in [0, 1]$ *istnieje shift podporządkowany o entropii* t.

Entropia shiftów podporządkowanych

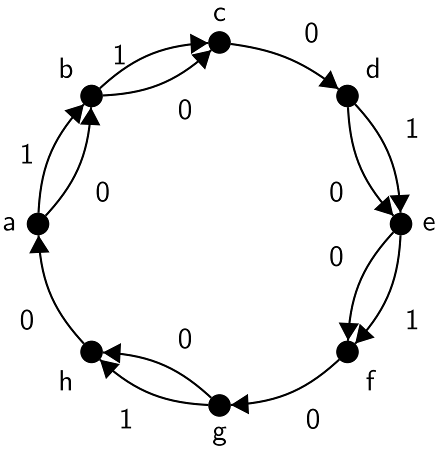
$$t = \pi/8 = 0.3926990816\ldots$$

Entropia shiftów podporządkowanych

$$t = \pi/8 = 0.3926990816\ldots$$

Przykład

$(11011010)^\infty$



Niezależność dla shiftów

Niezależność dla shiftów

Definicja

Powiemy, że zbiór $J \subset \mathbb{N}$ jest zbiorem niezależności dla shiftu $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ jeśli dla kazdej funkcji $\varphi\colon J \to \mathcal{A}$ istnieje taki punkt $x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \in X$, że $x_j = \varphi(j)$ dla wszystkich $j \in J$.

Przykłady zbiorów niezależności

Przykłady zbiorów niezależności

Przykład

Any subset of $\mathbb{N}$ is an independence set for the full shift.

Przykłady zbiorów niezależności

Przykład

Any subset of $\mathbb{N}$ is an independence set for the full shift.

Przykład

A subset of $\mathbb{N}$ is an independence set for the golden mean shift if and only if it does not contain two consecutive integers.

Przykłady zbiorów niezależności

Przykład

Any subset of $\mathbb{N}$ is an independence set for the full shift.

Przykład

A subset of $\mathbb{N}$ is an independence set for the golden mean shift if and only if it does not contain two consecutive integers.

Przykład

If $J \subset \mathbb{N}$ is an independence set for a shift space X, then so is every subset of J.

Przykłady zbiorów niezależności

Przykład

Any subset of $\mathbb{N}$ is an independence set for the full shift.

Przykład

A subset of $\mathbb{N}$ is an independence set for the golden mean shift if and only if it does not contain two consecutive integers.

Przykład

If $J \subset \mathbb{N}$ is an independence set for a shift space X, then so is every subset of J.

Przykład

If X is a binary hereditary shift, then a $J \subset \mathbb{N}$ is an independence set for X if and only if its characteristic function belongs to X.

Densities

Densities

Definicja

A set $A \subset \mathbb{N}$ has density α if the limit

$$d(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n}$$

exists and is equal to α.

Densities

Definicja

A set $A \subset \mathbb{N}$ has density α if the limit

$$d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n}$$

exists and is equal to α.

Definicja

The Shnirelman density of a set $A \subset \mathbb{N}$ is

$$d_{Sh}(A) = \inf_{n\geqslant 1} \left\{ \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Main theorem

Main theorem

Twierdzenie

Let X be a binary shift. Then the entropy of X is positive if and only if X is independent over a set A whose density exists, is positive, and is equal to its Shnirelman density.

Limiting frequency

Limiting frequency

Definicja

Let $a \in \mathcal{A}$ and $w = w_1 \dots w_k \in \mathcal{A}^*$.

Limiting frequency

Definicja

Let $a \in \mathcal{A}$ and $w = w_1 \dots w_k \in \mathcal{A}^*$. Define

$$||w||_a = |\{1 \leqslant j \leqslant k : w_j = a\}|,$$

Limiting frequency

Definicja

Let $a \in \mathcal{A}$ and $w = w_1 \ldots w_k \in \mathcal{A}^*$. Define

$$||w||_a = |\{1 \leqslant j \leqslant k : w_j = a\}|,$$
$$\mathrm{M}_k^a(X) = \max\left\{||w||_a \,:\, w \in \mathcal{B}_k(X)\right\}.$$

Limiting frequency

Definicja

Let $a \in \mathcal{A}$ and $w = w_1 \dots w_k \in \mathcal{A}^*$. Define

$$||w||_a = |\{1 \leqslant j \leqslant k : w_j = a\}|,$$
$$\mathrm{M}_k^a(X) = \max\{||w||_a \,:\, w \in \mathcal{B}_k(X)\}.$$

The sequence $\{\mathrm{M}_k^a(X)\}_{k=1}^{\infty}$ is subadditive, that is

$$0 \leqslant \mathrm{M}_{m+n}^a(X) \leqslant \mathrm{M}_m^a(X) + \mathrm{M}_n^a(X) \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Limiting frequency

Definicja

Let $a \in \mathcal{A}$ and $w = w_1 \dots w_k \in \mathcal{A}^*$. Define

$$||w||_a = |\{1 \leqslant j \leqslant k : w_j = a\}|,$$
$$\mathrm{M}_k^a(X) = \max\{||w||_a \,:\, w \in \mathcal{B}_k(X)\}.$$

The sequence $\{\mathrm{M}_k^a(X)\}_{k=1}^{\infty}$ is subadditive, that is

$$0 \leqslant \mathrm{M}_{m+n}^a(X) \leqslant \mathrm{M}_m^a(X) + \mathrm{M}_n^a(X) \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

By Fekete's Lemma we may definethe limiting frequency of a in X,

$$\mathrm{Fr}_a(X) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{M}_k^a(X)}{k} = \inf_{k\geqslant 1} \frac{\mathrm{M}_k^a(X)}{k}.$$

A topological consequence of maximal ergodic theorem

A topological consequence of maximal ergodic theorem

Definicja

For $a \in \mathcal{A}$ and $x \in X$ define the characteristic set $\chi_a(x)$ as the set of positions at which a appears in x, that is,

$$\chi_a(x) = \{j \in \mathbb{N} : x_j = a\}.$$

A topological consequence of maximal ergodic theorem

Definicja

For $a \in \mathcal{A}$ and $x \in X$ define the characteristic set $\chi_a(x)$ as the set of positions at which a appears in x, that is,

$$\chi_a(x) = \{j \in \mathbb{N} : x_j = a\}.$$

Twierdzenie

Let X be a shift space over an alphabet $\mathcal{A}$. Then for every symbol $a \in \mathcal{A}$ there exists a point $\omega_a \in X$ such that

$$d_{Sh}(\chi_a(\omega_a)) = d(\chi_a(\omega_a)) = \mathrm{Fr}_a(X).$$

Independence sets for blocks

Independence sets for blocks

Definicja

Let $\mathcal{F}$ be a (possibly empty) family of binary blocks of length $n \geqslant 0$.

Independence sets for blocks

Definicja

Let $\mathcal{F}$ be a (possibly empty) family of binary blocks of length $n \geqslant 0$. We say that $\mathcal{F}$ is independent over a set $J \subset \mathbb{N}$ and J is an independence set for $\mathcal{F}$ if for each map $\varphi \colon J \to \{0,1\}$ there is a block $w \in \mathcal{F}$ whose i-th symbol is $\varphi(i)$ for every $i \in J$.

Independence sets for blocks

Definicja

Let $\mathcal{F}$ be a (possibly empty) family of binary blocks of length $n \geqslant 0$. We say that $\mathcal{F}$ is independent over a set $J \subset \mathbb{N}$ and J is an independence set for $\mathcal{F}$ if for each map $\varphi\colon J \to \{0,1\}$ there is a block $w \in \mathcal{F}$ whose i-th symbol is $\varphi(i)$ for every $i \in J$.

Independence sets for blocks

Definicja

Let $\mathcal{F}$ be a (possibly empty) family of binary blocks of length $n \geqslant 0$. We say that $\mathcal{F}$ is independent over a set $J \subset \mathbb{N}$ and J is an independence set for $\mathcal{F}$ if for each map $\varphi\colon J \to \{0,1\}$ there is a block $w \in \mathcal{F}$ whose i-th symbol is $\varphi(i)$ for every $i \in J$. We denote the collection of all sets of independence for $\mathcal{F}$ by $\mathcal{I}(\mathcal{F})$.

Independence sets for blocks

Definicja

Let $\mathcal{F}$ be a (possibly empty) family of binary blocks of length $n \geqslant 0$. We say that $\mathcal{F}$ is independent over a set $J \subset \mathbb{N}$ and J is an independence set for $\mathcal{F}$ if for each map $\varphi\colon J \to \{0,1\}$ there is a block $w \in \mathcal{F}$ whose i-th symbol is $\varphi(i)$ for every $i \in J$. We denote the collection of all sets of independence for $\mathcal{F}$ by $\mathcal{I}(\mathcal{F})$. We assume the convention that the empty set is a set of independence for every (including empty) family of n-blocks.

Sauer-Perles^2-Shelah Lemma

Sauer-Perles^2-Shelah Lemma

Lemat (Sauer-Perles^2-Shelah)

Let $\mathcal{F} \subset \{0,1\}^n$ be a family of binary blocks of length $n \geqslant 1$. If for some $1 \leqslant k \leqslant n$ we have

$$|\mathcal{F}| > \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j},$$

then $\mathcal{F}$ is independent over some set of cardinality k.

Sauer-Perles^2-Shelah Lemma

Lemat (Sauer-Perles^2-Shelah)

Let $\mathcal{F} \subset \{0,1\}^n$ be a family of binary blocks of length $n \geqslant 1$. If for some $1 \leqslant k \leqslant n$ we have

$$|\mathcal{F}| > \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j},$$

then $\mathcal{F}$ is independent over some set of cardinality k.

Lemat (Pajor)

Let $\mathcal{F}$ be a family of binary blocks of length $n \geqslant 0$. Then $|\mathcal{I}(\mathcal{F})| \geqslant |\mathcal{F}|$.

Lamat Karpovskiego-Milmana

Lamat Karpovskiego-Milmana

Lemat (Karpovsky-Milman)

Niech X będzie shiftem binarnym o dodatniej entropii. Wówczas istnieje taki $\varepsilon > 0$, że dla każdego $n \geqslant 1$ znajdziemy zbiór $J \subset \{1, \ldots, n\}$ o $\lfloor \varepsilon n \rfloor$ elementach, który jest zbiorem niezależności dla X.

Lamat Karpovskiego-Milmana

Lemat (Karpovsky-Milman)

Niech X będzie shiftem binarnym o dodatniej entropii. Wówczas istnieje taki $\varepsilon > 0$, że dla każdego $n \geqslant 1$ znajdziemy zbiór $J \subset \{1, \dots, n\}$ o $\lfloor \varepsilon n \rfloor$ elementach, który jest zbiorem niezależności dla X.

Lemat (Analiza 1)

Niech $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ oraz $n \geqslant 1$. Wówczas

$$\sum_{j=0}^{\lfloor n\varepsilon \rfloor} \binom{n}{j} \leqslant 2^{n \cdot H(\varepsilon)},$$

gdzie $H(\varepsilon) = -\varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon) \log(1-\varepsilon)$.

Bibliografia I

- Marcin Kulczycki, Dominik Kwietniak, Jian Li
  Entropy and independence in symbolic dynamics.
  arXiv:1401.5969v1[math.DS]
- Jianya Liu, Peter Sarnak.
  The Möbius function and distal flows.
  arXiv:1303.4957v2[math.NT]
- Ryan Peckner.
  Uniqueness of the measure of maximal entropy for the squarefree flow.
  arXiv:1205.2905v5[math.DS]
- El Houcein El Abdalaoui, Mariusz Lemańczyk, Thierry De La Rue.
  A dynamical point of view on the set of B-free integers.
  arXiv:1311.3752v3[math.DS]

Bibliografia II

Francesco Cellarosi, Yakov G. Sinai.
Ergodic properties of square-free numbers.
arXiv:1112.4691v2[math.DS]

Peter Sarnak.
Three Lectures on the Mobius function randomness and dynamics.
onlinenotes(2011).

Dominik Kwietniak.
Topological entropy and distributional chaos in hereditary shifts with applications to spacing shifts and beta shifts.
DCDS A vol. 33 (2013), no. 6, pp. 2451-2467
doi:10.3934/dcds.2013.33.2451.