# Rozmaitości toryczne - geometria, algebra, kombinatoryka

Mateusz Michałek

Polska Akademia Nauk

Horizons in mathematics

# Plan

# Rozmaitości

Rozmaitości są podstawowymi obiektami geometrycznymi w matematyce. Pojęcie rozmaitości pozwala opisywać kształty, bez opisywania ich zanurzeń w otaczającej przestrzeni.

# Rozmaitości

Rozmaitości są podstawowymi obiektami geometrycznymi w matematyce. Pojęcie rozmaitości pozwala opisywać kształty, bez opisywania ich zanurzeń w otaczającej przestrzeni.

- Rozmaitości powstają poprzez sklejenie dobrze znanych obiektów zanurzonych.

# Rozmaitości

Rozmaitości są podstawowymi obiektami geometrycznymi w matematyce. Pojęcie rozmaitości pozwala opisywać kształty, bez opisywania ich zanurzeń w otaczającej przestrzeni.

- Rozmaitości powstają poprzez sklejenie dobrze znanych obiektów zanurzonych.
- W zależności od naszych preferencji matematycznych możemy badać rozmaitości algebraiczne, topologiczne, różniczkowe...

# Rozmaitości

Rozmaitości są podstawowymi obiektami geometrycznymi w matematyce. Pojęcie rozmaitości pozwala opisywać kształty, bez opisywania ich zanurzeń w otaczającej przestrzeni.

- Rozmaitości powstają poprzez sklejenie dobrze znanych obiektów zanurzonych.
- W zależności od naszych preferencji matematycznych możemy badać rozmaitości algebraiczne, topologiczne, różniczkowe...
- Od początków XX wieku język rozmaitości stał się dominujący w geometrii i jest używany do opisu obiektów takich jak wszcheświat, krzywa czy ogół prostych w przestrzeni czterowymiarowej.

# Rozmaitości

Rozmaitości są podstawowymi obiektami geometrycznymi w matematyce. Pojęcie rozmaitości pozwala opisywać kształty, bez opisywania ich zanurzeń w otaczającej przestrzeni.

- Rozmaitości powstają poprzez sklejenie dobrze znanych obiektów zanurzonych.
- W zależności od naszych preferencji matematycznych możemy badać rozmaitości algebraiczne, topologiczne, różniczkowe...
- Od początków XX wieku język rozmaitości stał się dominujący w geometrii i jest używany do opisu obiektów takich jak wszcheświat, krzywa czy ogół prostych w przestrzeni czterowymiarowej.
- Jestem geometrą algebraicznym, więc wykład będzie o rozmaitościach algebraicznych. Większość przykładów będzie dotyczyła rozmaitości zanurzonych, więc nie należy się (za bardzo) bać.

# Rozmaitości algebraiczne

Geometria algebraiczna zajmuje się badaniem własności geometrycznych zer wielomianów (czyli związkami algebry z geometrią).

# Rozmaitości algebraiczne

Geometria algebraiczna zajmuje się badaniem własności geometrycznych zer wielomianów (czyli związkami algebry z geometrią).

**Definicja (Afiniczna rozmaitość algebraiczna)**

*Rozmaitość afiniczna to zbiór zer (rozwiązań) wielomianów w pewnych (być może wielu!) zmiennych.*

# Przykłady rozmaitości algebraicznych

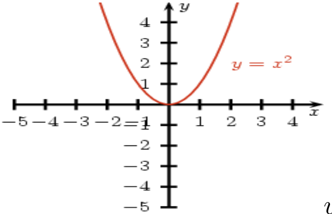
## Rozmaitości zadane równaniami

- Parabola

# Przykłady rozmaitości algebraicznych

## Rozmaitości zadane równaniami

- Parabola

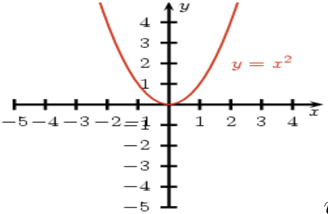



$$y - x^2 = 0$$

# Przykłady rozmaitości algebraicznych

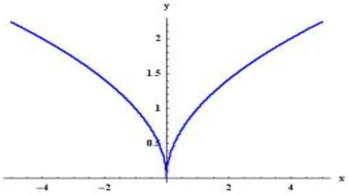
## Rozmaitości zadane równaniami

- Parabola




$$y - x^2 = 0$$

- Ostrze




$$y^3 - x^2 = 0$$

# Parametryzacja

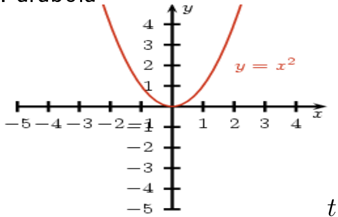
W wielu przypadkach rozmaitość możemy zadać poprzez parametryzację.

- Parabola

# Parametryzacja

W wielu przypadkach rozmaitość możemy zadać poprzez parametryzację.

- Parabola

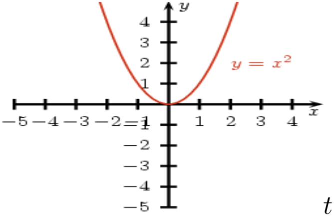



$$t \to (t^1, t^2)$$

# Parametryzacja

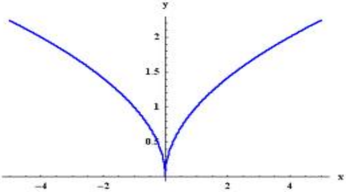
W wielu przypadkach rozmaitość możemy zadać poprzez parametryzację.

- Parabola




$$t \to (t^1, t^2)$$

- Ostrze




$$t \to (t^3, t^2)$$

# Jak przedstawiać rozmaitości algebraiczne

Mamy kilka sposobów

# Jak przedstawiać rozmaitości algebraiczne

Mamy kilka sposobów

- Rysunek (odradzam powyżej wymiaru 3)

# Jak przedstawiać rozmaitości algebraiczne

Mamy kilka sposobów

- Rysunek (odradzam powyżej wymiaru 3)
- Zera wielomianów - najbardziej klasyczna i rozwinięta metoda

# Jak przedstawiać rozmaitości algebraiczne

Mamy kilka sposobów

- Rysunek (odradzam powyżej wymiaru 3)
- Zera wielomianów - najbardziej klasyczna i rozwinięta metoda
- Parametryzacja - najczęściej pojawiająca się w zastosowaniach matematyki

# Jak przedstawiać rozmaitości algebraiczne

Mamy kilka sposobów

- Rysunek (odradzam powyżej wymiaru 3)
- Zera wielomianów - najbardziej klasyczna i rozwinięta metoda
- Parametryzacja - najczęściej pojawiająca się w zastosowaniach matematyki

Jak znajdować równania opisujące parametryzowaną rozmaitość?

# Jak przedstawiać rozmaitości algebraiczne

Mamy kilka sposobów

- Rysunek (odradzam powyżej wymiaru 3)
- Zera wielomianów - najbardziej klasyczna i rozwinięta metoda
- Parametryzacja - najczęściej pojawiająca się w zastosowaniach matematyki

Jak znajdować równania opisujące parametryzowaną rozmaitość?
Jakie zależności spełniają funkcje parametryzujące?

# Przykład:

Rozważmy trzecie zanurzenie Veronese prostej rzutowej:

$$(a, b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

# Przykład:

Rozważmy trzecie zanurzenie Veronese prostej rzutowej:

$$(a, b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

Jakie równania zerują się na obrazie?

# Przykład:

Rozważmy trzecie zanurzenie Veronese prostej rzutowej:

$$(a,b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

Jakie równania zerują się na obrazie?

$$x_0x_2 = x_1^2,$$

# Przykład:

Rozważmy trzecie zanurzenie Veronese prostej rzutowej:

$$(a, b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

Jakie równania zerują się na obrazie?

$$x_0x_2 = x_1^2,$$

$$x_0x_3 = x_1x_2,$$

# Przykład:

Rozważmy trzecie zanurzenie Veronese prostej rzutowej:

$$(a, b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

Jakie równania zerują się na obrazie?

$$x_0x_2 = x_1^2,$$

$$x_0x_3 = x_1x_2,$$

$$x_1x_3 = x_2^2.$$

# Ideały

Jeśli dwa wielomiany $f, g$ zerują się na rozmaitości, to:

# Ideały

Jeśli dwa wielomiany $f, g$ zerują się na rozmaitości, to:

- zeruje się także ich suma $f + g$,

# Ideały

Jeśli dwa wielomiany $f, g$ zerują się na rozmaitości, to:

- zeruje się także ich suma $f + g$,
- dla dowolnego wielomianu $h$, zeruje się także iloczyn $hf$.

# Ideały

Jeśli dwa wielomiany $f, g$ zerują się na rozmaitości, to:

- zeruje się także ich suma $f + g$,
- dla dowolnego wielomianu $h$, zeruje się także iloczyn $hf$.

Podzbiór wielomianów zamkniętych ze względu na sumę i mnożenie przez dowolny wielomian nazywamy *ideałem*.

# Ideały

Jeśli dwa wielomiany $f, g$ zerują się na rozmaitości, to:

- zeruje się także ich suma $f + g$,
- dla dowolnego wielomianu $h$, zeruje się także iloczyn $hf$.

Podzbiór wielomianów zamkniętych ze względu na sumę i mnożenie przez dowolny wielomian nazywamy *ideałem*.
Zauważmy, że $f^n$ ma taki sam zbiór zer jak $f$.

# Ideały

Jeśli dwa wielomiany $f, g$ zerują się na rozmaitości, to:

- zeruje się także ich suma $f+g$,
- dla dowolnego wielomianu $h$, zeruje się także iloczyn $hf$.

Podzbiór wielomianów zamkniętych ze względu na sumę i mnożenie przez dowolny wielomian nazywamy *ideałem*.
Zauważmy, że $f^n$ ma taki sam zbiór zer jak $f$.

**Twierdzenie (Twierdzenie Hilberta o zerach, Nullstellensatz)**

*Nad ciałem algebraicznie domkniętym mamy wzajemną odpowiedniość pomiędzy rozmaitościami algebraicznymi, a ideałami radykalnymi, tzn. takimi ideałami $I$, że $f \in I \Leftrightarrow f^n \in I$.*

# Rozmaitości toryczne

Jest pewna klasa rozmaitości algebraicznych dla których wiele trudnych pytań staje się prostych...

# Rozmaitości toryczne

Jest pewna klasa rozmaitości algebraicznych dla których wiele trudnych pytań staje się prostych...
Pojawiają się one zaskakująco często zarówno w matematyce stosowanej jak i teoretycznej.

# Rozmaitości toryczne

Jest pewna klasa rozmaitości algebraicznych dla których wiele trudnych pytań staje się prostych...
Pojawiają się one zaskakująco często zarówno w matematyce stosowanej jak i teoretycznej.

**Definicja (Rozmaitość toryczna - wersja dla dzieci)**

*Rozmaitość toryczna to domknięcie odwzorowania zadanego jednomianami. (Jednomian to iloczyn zmiennych) Wszystkie prezentowane do tej pory przykłady były tej postaci.*

# Rozmaitości toryczne

Jest pewna klasa rozmaitości algebraicznych dla których wiele trudnych pytań staje się prostych...
Pojawiają się one zaskakująco często zarówno w matematyce stosowanej jak i teoretycznej.

**Definicja (Rozmaitość toryczna - wersja dla dzieci)**

*Rozmaitość toryczna to domknięcie odwzorowania zadanego jednomianami. (Jednomian to iloczyn zmiennych) Wszystkie prezentowane do tej pory przykłady były tej postaci.*

**Definicja (Rozmaitość toryczna $18+$)**

*Rozmaitość toryczna to (normalna) rozmaitość algebraiczna, na której działa torus algebraiczny $(\mathbb{C}^*)^n$, przy czym jedna z orbit jest gęsta.*

# Dlaczego rozmaitości toryczne są ciekawe?

- $t \to (t^1, t^2)$ $\qquad$ $t \to (t^3, t^2)$

# Dlaczego rozmaitości toryczne są ciekawe?

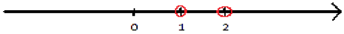
- $t \to (t^1, t^2)$ $t \to (t^3, t^2)$

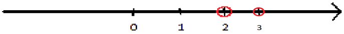
  *'The world is continuous, but the mind is discrete.'*
  *David Mumford*

# Dlaczego rozmaitości toryczne są ciekawe?

- $t \to (t^1, t^2)$ $\qquad t \to (t^3, t^2)$

  *'The world is continuous, but the mind is discrete.'*
  *David Mumford*

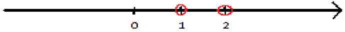


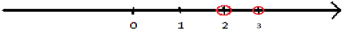



# Dlaczego rozmaitości toryczne są ciekawe?

- $t \to (t^1, t^2)$ $\qquad\qquad$ $t \to (t^3, t^2)$

  *'The world is continuous, but the mind is discrete.'*
  *David Mumford*



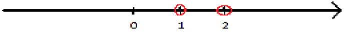



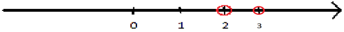

- *Rozmaitość parametryzowaną jednomianami w $n$ zmiennych reprezentujemy za pomocą punktów w kracie $\mathbb{Z}^n$, pamiętając jedynie wykładniki.*

# Dlaczego rozmaitości toryczne są ciekawe?

- $t \to (t^1, t^2)$ $\qquad\qquad$ $t \to (t^3, t^2)$

  *'The world is continuous, but the mind is discrete.'*
  *David Mumford*



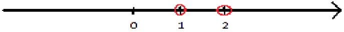



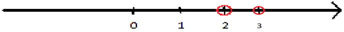

- *Rozmaitość parametryzowaną jednomianami w $n$ zmiennych reprezentujemy za pomocą punktów w kracie $\mathbb{Z}^n$, pamiętając jedynie wykładniki.*
- *Geometria toryczna rozwinęła się w latach '80. Czołowi matematycy w reprezentujący tę dziedzinę to Oda, Fulton, Sturmfels, Cox.*

# Dlaczego rozmaitości toryczne są ciekawe?

- $t \to (t^1, t^2)$ $\qquad\qquad$ $t \to (t^3, t^2)$

  *'The world is continuous, but the mind is discrete.'*
  *David Mumford*



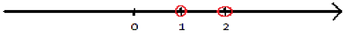



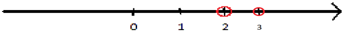

- *Rozmaitość parametryzowaną jednomianami w $n$ zmiennych reprezentujemy za pomocą punktów w kracie $\mathbb{Z}^n$, pamiętając jedynie wykładniki.*
- *Geometria toryczna rozwinęła się w latach '80. Czołowi matematycy w reprezentujący tę dziedzinę to Oda, Fulton, Sturmfels, Cox.*
- *Pomysł badania związków ustawienia punktów w kracie z własnościami wielomianów pochodzi od...*

# Dlaczego rozmaitości toryczne są ciekawe?

- $t \to (t^1, t^2)$ $\qquad\qquad$ $t \to (t^3, t^2)$

  *'The world is continuous, but the mind is discrete.'*
  *David Mumford*




- *Rozmaitość parametryzowaną jednomianami w $n$ zmiennych reprezentujemy za pomocą punktów w kracie $\mathbb{Z}^n$, pamiętając jedynie wykładniki.*
- *Geometria toryczna rozwinęła się w latach '80. Czołowi matematycy w reprezentujący tę dziedzinę to Oda, Fulton, Sturmfels, Cox.*
- *Pomysł badania związków ustawienia punktów w kracie z własnościami wielomianów pochodzi od... Newtona*

# Dlaczego rozmaitości toryczne są ciekawe?

# Dlaczego rozmaitości toryczne są ciekawe?

- Ciekawe i ładne związki z geometrią dyskretną

# Dlaczego rozmaitości toryczne są ciekawe?

- Ciekawe i ładne związki z geometrią dyskretną
- Możliwość obliczania (trudnych) niezmienników algebraicznych za pomocą (łatwiejszych) metod kombinatorycznych

# Dlaczego rozmaitości toryczne są ciekawe?

- Ciekawe i ładne związki z geometrią dyskretną
- Możliwość obliczania (trudnych) niezmienników algebraicznych za pomocą (łatwiejszych) metod kombinatorycznych
- Matematyka stosowana (równania różniczkowe, reakcje chemiczne, mutacje DNA, fizyka)

# Dlaczego rozmaitości toryczne są ciekawe?

- Ciekawe i ładne związki z geometrią dyskretną
- Możliwość obliczania (trudnych) niezmienników algebraicznych za pomocą (łatwiejszych) metod kombinatorycznych
- Matematyka stosowana (równania różniczkowe, reakcje chemiczne, mutacje DNA, fizyka)
- Związki z innymi rozmaitościami (degeneracje toryczne, pokrycia toryczne)

# Ale jakie są te zapowiadane ładne i ciekawe związki z geometrią dyskretną?

# Ale jakie są te zapowiadane ładne i ciekawe związki z geometrią dyskretną?

To może troszeczkę na początku boleć, (mózg, z ewolucyjnego punktu widzenia namawia nas do oszczędzania cukru)

# Ale jakie są te zapowiadane ładne i ciekawe związki z geometrią dyskretną?

To może troszeczkę na początku boleć, (mózg, z ewolucyjnego punktu widzenia namawia nas do oszczędzania cukru) ale tak jest jak się chcemy nauczyć czegoś nowego.

# Ale jakie są te zapowiadane ładne i ciekawe związki z geometrią dyskretną?

To może troszeczkę na początku boleć, (mózg, z ewolucyjnego punktu widzenia namawia nas do oszczędzania cukru) ale tak jest jak się chcemy nauczyć czegoś nowego.
′Nie ważne czego się uczymy. Ważne, aby nie było to ogólnie znane i było odpowiednio trudne′ (o matematyce)

# Wielościany i stożki

## Definicja

*Wielościan to powłoka wypukła skończonej liczby punktów w przestrzeni wektorowej (np. kwadrat). Na tym wykładzie wierzchołki wielościanu będą zawsze punktami całkowitymi, a nasze zainteresowania ograniczą się do punktów całkowitych w wielościanie. Równoważnie, wielościan można zadać jako przecięcie półprzestrzeni.*
*Stożek (dla nas) to ogół kombinacji nieujemnych kombinacji liniowych skończonej liczby punktów (np. dodatnia ćwiartka).*

# Wielościany i stożki

## Definicja

*Wielościan to powłoka wypukła skończonej liczby punktów w przestrzeni wektorowej (np. kwadrat). Na tym wykładzie wierzchołki wielościanu będą zawsze punktami całkowitymi, a nasze zainteresowania ograniczą się do punktów całkowitych w wielościanie. Równoważnie, wielościan można zadać jako przecięcie półprzestrzeni.*
*Stożek (dla nas) to ogół kombinacji nieujemnych kombinacji liniowych skończonej liczby punktów (np. dodatnia ćwiartka).*

Wielościany i stożki są ściśle związane.

# Wielościany i stożki

## Definicja

*Wielościan to powłoka wypukła skończonej liczby punktów w przestrzeni wektorowej (np. kwadrat). Na tym wykładzie wierzchołki wielościanu będą zawsze punktami całkowitymi, a nasze zainteresowania ograniczą się do punktów całkowitych w wielościanie. Równoważnie, wielościan można zadać jako przecięcie półprzestrzeni.*
*Stożek (dla nas) to ogół kombinacji nieujemnych kombinacji liniowych skończonej liczby punktów (np. dodatnia ćwiartka).*

Wielościany i stożki są ściśle związane.

- Mając stożek możemy go przeciąć hiperpłaszczyzną otrzymując wielościan.

# Wielościany i stożki

**Definicja**

*Wielościan to powłoka wypukła skończonej liczby punktów w przestrzeni wektorowej (np. kwadrat). Na tym wykładzie wierzchołki wielościanu będą zawsze punktami całkowitymi, a nasze zainteresowania ograniczą się do punktów całkowitych w wielościanie. Równoważnie, wielościan można zadać jako przecięcie półprzestrzeni.*
*Stożek (dla nas) to ogół kombinacji nieujemnych kombinacji liniowych skończonej liczby punktów (np. dodatnia ćwiartka).*

Wielościany i stożki są ściśle związane.

- Mając stożek możemy go przeciąć hiperpłaszczyzną otrzymując wielościan.
- Mając wielościan możemy umieścić go w przestrzeni i wziąć stożek nad nim.

# Chcemy coś fajnego, bo zaśniemy

- Weźmy dowolny wielościan $P$ (o wierzchołkach w punktach całkowitych).

# Chcemy coś fajnego, bo zaśniemy

- Weźmy dowolny wielościan $P$ (o wierzchołkach w punktach całkowitych).
- Wielościan ten ma pewną liczbę punktów całkowitych $f(1)$.

# Chcemy coś fajnego, bo zaśniemy

- Weźmy dowolny wielościan $P$ (o wierzchołkach w punktach całkowitych).
- Wielościan ten ma pewną liczbę punktów całkowitych $f(1)$.
- Rozważmy (naturalną) wielokrotność naszego wielościanu $nP$.

# Chcemy coś fajnego, bo zaśniemy

- Weźmy dowolny wielościan $P$ (o wierzchołkach w punktach całkowitych).
- Wielościan ten ma pewną liczbę punktów całkowitych $f(1)$.
- Rozważmy (naturalną) wielokrotność naszego wielościanu $nP$.
- Wielokrotność ma pewną liczbę punktów całkowitych $f(n)$.

# Chcemy coś fajnego, bo zaśniemy

- Weźmy dowolny wielościan $P$ (o wierzchołkach w punktach całkowitych).
- Wielościan ten ma pewną liczbę punktów całkowitych $f(1)$.
- Rozważmy (naturalną) wielokrotność naszego wielościanu $nP$.
- Wielokrotność ma pewną liczbę punktów całkowitych $f(n)$.
- Funkcja $f$ jest wielomianem (Hilberta-Ehrharta)!

## Chcemy coś fajnego, bo zaśniemy

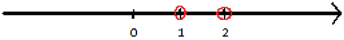
- Weźmy dowolny wielościan $P$ (o wierzchołkach w punktach całkowitych).
- Wielościan ten ma pewną liczbę punktów całkowitych $f(1)$.
- Rozważmy (naturalną) wielokrotność naszego wielościanu $nP$.
- Wielokrotność ma pewną liczbę punktów całkowitych $f(n)$.
- Funkcja $f$ jest wielomianem (Hilberta-Ehrharta)!
- Łatwe ćwiczenie: wykazać, że współczynnik wiodący to $(volP)n^{\dim P}$.

# Przedstawienie rozmaitości torycznej jako stożek

Całkowite dodatnie kombinacje wykładników jednomianów parametryzujących rozmaitość toryczną generują

# Przedstawienie rozmaitości torycznej jako stożek

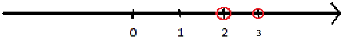
Całkowite dodatnie kombinacje wykładników jednomianów parametryzujących rozmaitość toryczną generują stożek



# Przedstawienie rozmaitości torycznej jako stożek

Całkowite dodatnie kombinacje wykładników jednomianów parametryzujących rozmaitość toryczną generują stożek


który może mieć 'luki'




.

# Związki

Geometryczne własności rozmaitości odpowiadają kombinatorycznym własnościom stożków:

# Związki

Geometryczne własności rozmaitości odpowiadają kombinatorycznym własnościom stożków:

1. 'Luki' świadczą o (rodzaju) osobliwości

# Związki

Geometryczne własności rozmaitości odpowiadają kombinatorycznym własnościom stożków:

1. 'Luki' świadczą o (rodzaju) osobliwości
2. Wymiar rozmaitości to wymiar stożka

# Związki

Geometryczne własności rozmaitości odpowiadają kombinatorycznym własnościom stożków:

1. 'Luki' świadczą o (rodzaju) osobliwości
2. Wymiar rozmaitości to wymiar stożka

18+ Wielomian Hilberta-Ehrharta wielościanu będącego cięciem stożka, to wielomian Hilberta stowarzyszonej rozmaitości rzutowej

# Związki

Geometryczne własności rozmaitości odpowiadają kombinatorycznym własnościom stożków:

1. 'Luki' świadczą o (rodzaju) osobliwości
2. Wymiar rozmaitości to wymiar stożka

18+ Wielomian Hilberta-Ehrharta wielościanu będącego cięciem stożka, to wielomian Hilberta stowarzyszonej rozmaitości rzutowej

21+ Można badać obiekty takie jak: grupa Picarda, grupa klas, miejsce geometryczne i rodzaj osobliwości, deformacje, kohomologie wiązek liniowych, grupy podstawowe, orbity działań torusa, równania zadające rozmaitość - za pomocą metod kombinatoryczych.

# Przykład:

Wróćmy do przykładu Veronese:

$$(a, b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

# Przykład:

Wróćmy do przykładu Veronese:

$$(a, b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

Otrzymujemy cztery punkty:

# Przykład:

Wróćmy do przykładu Veronese:

$$(a, b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

Otrzymujemy cztery punkty:

$$(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$$

## Przykład:

Wróćmy do przykładu Veronese:

$$(a, b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

Otrzymujemy cztery punkty:

$$(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$$

Mamy więc do czynienia z jednowymiarowym wielościanem, który rozpina dwuwymarowy stożek. Odpowiada to temu, iż parametryzowana rozmaitość (afiniczna) jest dwuwymiarowa, (a stowarzyszona rozmaitość rzutowa jest jednowymiarowa).

# Przykład:

Wróćmy do przykładu Veronese:

$$(a, b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

Otrzymujemy cztery punkty:

$$(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$$

Mamy więc do czynienia z jednowymiarowym wielościanem, który rozpina dwuwymarowy stożek. Odpowiada to temu, iż parametryzowana rozmaitość (afiniczna) jest dwuwymiarowa, (a stowarzyszona rozmaitość rzutowa jest jednowymiarowa).
[18+] Objętość wielościanu to $3$. Wynika stąd, że współczynnik przy czynniku wiodącym wielomianu Hilberta to $3$. Współczynnik ten to tak zwany stopień rozmaitości, czyli liczba punktów którą otrzymujemy przecinając rozmaitość z generyczną podprzestrzenią kowymiaru równego wymiarowi rozmaitości.

# Jak interpretować równania?

Rozważmy parametryzację dowolnej rozmaitości algebraicznej:

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_k}).$$

# Jak interpretować równania?

Rozważmy parametryzację dowolnej rozmaitości algebraicznej:

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_k}).$$

Tutaj $\alpha_i$ to $n$-tki liczb całkowitych.

# Jak interpretować równania?

Rozważmy parametryzację dowolnej rozmaitości algebraicznej:

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_k}).$$

Tutaj $\alpha_i$ to $n$-tki liczb całkowitych.
Zgodnie z poprzednimi slajdami $\alpha_i$ jest punktem w kracie $\mathbb{Z}^n$.

# Jak interpretować równania?

Rozważmy parametryzację dowolnej rozmaitości algebraicznej:

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_k}).$$

Tutaj $\alpha_i$ to $n$-tki liczb całkowitych.
Zgodnie z poprzednimi slajdami $\alpha_i$ jest punktem w kracie $\mathbb{Z}^n$.
Punkty te mogą spełniać zależności liniowe, np.

$$\alpha_1 + 2\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5.$$

# Jak interpretować równania?

Rozważmy parametryzację dowolnej rozmaitości algebraicznej:

$$(x_1, \dots, x_n) \to (x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_k}).$$

Tutaj $\alpha_i$ to $n$-tki liczb całkowitych.
Zgodnie z poprzednimi slajdami $\alpha_i$ jest punktem w kracie $\mathbb{Z}^n$.
Punkty te mogą spełniać zależności liniowe, np.

$$\alpha_1 + 2\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5.$$

Każdej zależności liniowej odpowiada dwumian (różnica dwóch jednomianów) w zmiennych z kodziedziny odwzorowania, np.

$$y_1 y_3^2 = y_2 y_4 y_5$$

# Jak interpretować równania?

Łatwo pokazać, że dwumian zeruje się na rozmaitości wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające wykładniki spełniają daną zależność liniową.

# Jak interpretować równania?

Łatwo pokazać, że dwumian zeruje się na rozmaitości wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające wykładniki spełniają daną zależność liniową.

**Twierdzenie (Dobre ćwiczenie!)**

*Dowolne równanie zerujące się na rozmaitości torycznej, jest kombinacją liniową dwumianów pochodzących od zależności liniowych pomiędzy punktami w kracie odpowiadającymi parametryzującym wykładnikom.*

# Jak interpretować równania?

Łatwo pokazać, że dwumian zeruje się na rozmaitości wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające wykładniki spełniają daną zależność liniową.

**Twierdzenie (Dobre ćwiczenie!)**

*Dowolne równanie zerujące się na rozmaitości torycznej, jest kombinacją liniową dwumianów pochodzących od zależności liniowych pomiędzy punktami w kracie odpowiadającymi parametryzującym wykładnikom.*

Zamieniliśmy więc (bardzo trudny) problem badania relacji pomiędzy wielomianami na (prostszy) problem badania zależności liniowych pomiędzy punktami.

# Przykład

Wróćmy do przykładu Veronese:

$$(a, b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

i odpowiadających czterech punktów:

$$(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$$

# Przykład

Wróćmy do przykładu Veronese:

$$(a, b) \to (a^3, a^2 b, ab^2, b^3)$$

i odpowiadających czterech punktów:

$$(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$$

Jakie są relacje pomiędzy nimi?

# Przykład

Wróćmy do przykładu Veronese:

$$(a, b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

i odpowiadających czterech punktów:

$$(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$$

Jakie są relacje pomiędzy nimi?
$(3, 0) + (1, 2) = 2(2, 1)$ odpowiadająca równaniu $x_0x_2 = x_1^2$

# Przykład

Wróćmy do przykładu Veronese:

$$(a, b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

i odpowiadających czterech punktów:

$$(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$$

Jakie są relacje pomiędzy nimi?
$(3, 0) + (1, 2) = 2(2, 1)$ odpowiadająca równaniu $x_0x_2 = x_1^2$
$(2, 1) + (0, 3) = 2(1, 2)$ odpowiadająca równaniu $x_1x_3 = x_2^2$

# Przykład

Wróćmy do przykładu Veronese:

$$(a,b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

i odpowiadających czterech punktów:

$$(3,0), (2,1), (1,2), (0,3)$$

Jakie są relacje pomiędzy nimi?
$(3,0) + (1,2) = 2(2,1)$ odpowiadająca równaniu $x_0x_2 = x_1^2$
$(2,1) + (0,3) = 2(1,2)$ odpowiadająca równaniu $x_1x_3 = x_2^2$
$(3,0) + (0,3) = (2,1) + (1,2)$ odpowiadająca równaniu $x_0x_3 = x_1x_2$

# Przykład

Wróćmy do przykładu Veronese:

$$(a, b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

i odpowiadających czterech punktów:

$$(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$$

# Przykład

Wróćmy do przykładu Veronese:

$$(a,b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

i odpowiadających czterech punktów:

$$(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)$$

A co np. z równaniem $x_1^2x_3 - x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_3 - 2x_2^3$?

# Przykład

Wróćmy do przykładu Veronese:

$$(a, b) \to (a^3, a^2b, ab^2, b^3)$$

i odpowiadających czterech punktów:

$$(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$$

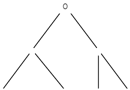
A co np. z równaniem $x_1^2x_3 - x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_3 - 2x_2^3$?
Jest ono równe $(x_3(x_0x_2 - x_1^2)) - x_2(x_0x_3 - x_1x_2) + 2x_2(x_1x_3 - x_2^2)$.

# Filogenetyka

- T – drzewo $\leftrightarrow$ model ewolucji
- Wierzchołki $\leftrightarrow$ gatunki
- Krawędzie $\leftrightarrow$ mutacje

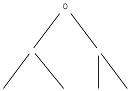
# Filogenetyka

- T – drzewo $\leftrightarrow$ model ewolucji
- Wierzchołki $\leftrightarrow$ gatunki
- Krawędzie $\leftrightarrow$ mutacje

- T 

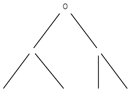
# Filogenetyka

- T – drzewo $\leftrightarrow$ model ewolucji
- Wierzchołki $\leftrightarrow$ gatunki
- Krawędzie $\leftrightarrow$ mutacje

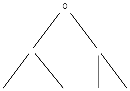
- T  $+ \quad \widehat{W}$ model

# Filogenetyka

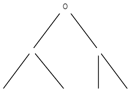
- T – drzewo $\leftrightarrow$ model ewolucji
- Wierzchołki $\leftrightarrow$ gatunki
- Krawędzie $\leftrightarrow$ mutacje

- T  $+$ $\widehat{W}$ model $\rightarrow$ rozmaitość algebraiczna $X(T,\widehat{W})$

# Filogenetyka

- T – drzewo $\leftrightarrow$ model ewolucji
- Wierzchołki $\leftrightarrow$ gatunki
- Krawędzie $\leftrightarrow$ mutacje
- T  $+ \quad \widehat{W}$ model $\rightarrow$ rozmaitość algebraiczna $X(T, \widehat{W})$
- Model to pewna wyróżniona podprzestrzeń dopuszczonych parametrów mutacji

# Filogenetyka

- T – drzewo $\leftrightarrow$ model ewolucji
- Wierzchołki $\leftrightarrow$ gatunki
- Krawędzie $\leftrightarrow$ mutacje
- T  $+$ $\widehat{W}$ model $\to$ rozmaitość algebraiczna $X(T, \widehat{W})$
- Model to pewna wyróżniona podprzestrzeń dopuszczonych parametrów mutacji
- Parametry mutacji mogą mieć symetrie (model Neyman-Felsenstein, modele Kimura)

# Jaka rozmaitość algebraiczna?

$$\begin{tikzcd}
 & \circ \arrow[dl, "\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}"'] \arrow[dr, "\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix}"] & \\
\cdot & & \cdot
\end{tikzcd}$$

$$\psi : (\lambda_0, \lambda_1, a_1, a_2, b_1, b_2) \to$$

$$(\lambda_0 a_1 b_1 + \lambda_1 a_2 b_2, \lambda_0 a_1 b_2 + \lambda_1 a_2 b_1, \lambda_0 a_2 b_1 + \lambda_1 a_1 b_2, \lambda_0 a_2 b_2 + \lambda_1 a_1 b_1).$$

# Modele filogenetyczne

- Model Jukes-Cantor (Cavender-Farris-Neyman) (matematycznie odpowiadający grupie $S_2 = \mathbb{Z}_2$):

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

# Modele filogenetyczne

- Model Jukes-Cantor (Cavender-Farris-Neyman) (matematycznie odpowiadający grupie $S_2 = \mathbb{Z}_2$):

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

- Model 3-Kimura model (matematycznie odpowiadający grupie $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$):

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}.$$

# Model Jukes-Cantor

$$\begin{tikzcd} & \circ \arrow[dl, "{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}}"'] \arrow[dr, "{\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix}}"] & \\ \cdot & & \cdot \end{tikzcd}$$

$$\psi : (a_1, a_2, b_1, b_2) \to$$

$$(a_1b_1 + a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1, a_2b_1 + a_1b_2, a_2b_2 + a_1b_1).$$

# Jaki to ma związek z rozmaitościami torycznymi?

$$\psi : (a_1, a_2, b_1, b_2) \to$$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1, a_2 b_1 + a_1 b_2, a_2 b_2 + a_1 b_1)$$

Przecież to nie są jednomiany!

# Jaki to ma związek z rozmaitościami torycznymi?

$$\psi : (a_1, a_2, b_1, b_2) \to$$
$$(a_1b_1 + a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1, a_2b_1 + a_1b_2, a_2b_2 + a_1b_1)$$

Przecież to nie są jednomiany! Czyżby?

# Jaki to ma związek z rozmaitościami torycznymi?

$$\psi : (a_1, a_2, b_1, b_2) \to$$
$$(a_1 b_1 + a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1, a_2 b_1 + a_1 b_2, a_2 b_2 + a_1 b_1)$$

Przecież to nie są jednomiany! Czyżby?
Istnieje sztuczuka, która nazywa się dyskretną transformacją Fouriera.
Polega ona na zastosowaniu dwóch automorfizmów: jednego w dziedzinie, jednego w przeciwdziedzinie.

# Jaki to ma związek z rozmaitościami torycznymi?

$$\psi : (a_1, a_2, b_1, b_2) \to$$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1, a_2 b_1 + a_1 b_2, a_2 b_2 + a_1 b_1)$$

Przecież to nie są jednomiany! Czyżby?

Automorfizm przeciwdziedziny:

$$(x_0, x_2) = (x_0 + x_2, x_0 - x_2)$$

# Jaki to ma związek z rozmaitościami torycznymi?

$$\psi : (a_1, a_2, b_1, b_2) \to$$

$$(a_1b_1 + a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1, a_2b_1 + a_1b_2, a_2b_2 + a_1b_1)$$

Przecież to nie są jednomiany! Czyżby?

Automorfizm przeciwdziedziny:

$$(x_0, x_2) = (x_0 + x_2, x_0 - x_2)$$

Nowa parametryzacja to:

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2), (a_1 - a_2)(b_1 - b_2), (a_1 - a_2)(b_1 - b_2), (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$$

# Jaki to ma związek z rozmaitościami torycznymi?

$$\psi : (a_1, a_2, b_1, b_2) \to$$

$$(a_1b_1 + a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1, a_2b_1 + a_1b_2, a_2b_2 + a_1b_1)$$

Przecież to nie są jednomiany! Czyżby?

Automorfizm przeciwdziedziny:

$$(x_0, x_2) = (x_0 + x_2, x_0 - x_2)$$

Nowa parametryzacja to:

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2), (a_1 - a_2)(b_1 - b_2), (a_1 - a_2)(b_1 - b_2), (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$$

A to już są jednomiany w zmiannych $(a_1 + a_2, a_1 - a_2, b_1 + b_2, b_1 - b_2)$.

# Ogólne rozmaitości toryczne

Rozmaitości toryczne są specyficznymi rozmaitościami algebraicznymi.

# Ogólne rozmaitości toryczne

Rozmaitości toryczne są specyficznymi rozmaitościami algebraicznymi.

- Posiadają ładne własności i dzięki związkom ze stożkami i wielościanami można je badać za pomocą metod kombinatorycznych

# Ogólne rozmaitości toryczne

Rozmaitości toryczne są specyficznymi rozmaitościami algebraicznymi.

- Posiadają ładne własności i dzięki związkom ze stożkami i wielościanami można je badać za pomocą metod kombinatorycznych
- Tematyka rozmaitości torycznych jest baaaardzo szeroka (od zaawansowanych pytań teoretycznych dotyczących kategorii pochodnych, przez bardzo konkretne pytania dotyczące struktury kombinatorycznej, po pytania inspirowane zastosowaniami matematyki)

# Ogólne rozmaitości toryczne

Rozmaitości toryczne są specyficznymi rozmaitościami algebraicznymi.

- Posiadają ładne własności i dzięki związkom ze stożkami i wielościanami można je badać za pomocą metod kombinatorycznych
- Tematyka rozmaitości torycznych jest baaaardzo szeroka (od zaawansowanych pytań teoretycznych dotyczących kategorii pochodnych, przez bardzo konkretne pytania dotyczące struktury kombinatorycznej, po pytania inspirowane zastosowaniami matematyki)
- (O czym nie mówiłem) Tak jak ogólną rozmaitość algebraiczną otrzymujemy sklejając rozmaitości zanurzone, tak stożki możemy sklejać otrzymując tak zwany wachlarz, reprezentujący ogólną rozmaitość toryczną (niekoniecznie zanurzoną)

Dziękuję!