Badanie regularności w słowach - przypadek współbieżny

Łukasz Mikulski Marcin Piątkowski

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Horyzonty Matematyki 2014
Będlewo, 19 marca 2014

Alfabet współbieżny $\theta = (\Sigma, dep)$

- Σ – skończony zbiór liter (atomowych akcji)
- $dep \subseteq \Sigma \times \Sigma$ – symetryczna i zwrotna relacja zależności
- $ind = (\Sigma \times \Sigma) \setminus dep$ – relacja niezależności
- $\equiv_\theta \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$ – relacja równoważności

Alfabet współbieżny $\theta = (\Sigma, dep)$

- Σ – skończony zbiór liter (atomowych akcji)
- $dep \subseteq \Sigma \times \Sigma$ – symetryczna i zwrotna relacja zależności
- $ind = (\Sigma \times \Sigma) \setminus dep$ – relacja niezależności
- $\equiv_\theta \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$ – relacja równoważności

$$\Sigma = \{\ a, b, c, d\}$$

$$abdaacda \ \equiv_\theta \ adbcaada$$

dep

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\ d \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$

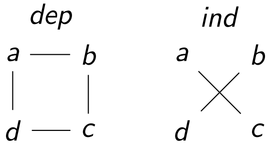
ind

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] a \arrow[dr] & b \arrow[dl] \\ d & c \end{tikzcd}$$

Alfabet współbieżny $\theta = (\Sigma, dep)$

- Σ – skończony zbiór liter (atomowych akcji)
- $dep \subseteq \Sigma \times \Sigma$ – symetryczna i zwrotna relacja zależności
- $ind = (\Sigma \times \Sigma) \setminus dep$ – relacja niezależności
- $\equiv_\theta \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$ – relacja równoważności

$$\Sigma = \{\, a, b, c, d \}$$



$$abdaacda \;\equiv_\theta\; adbcaada$$

$$abdaacda \longrightarrow adbaacda$$

Alfabet współbieżny $\theta = (\Sigma, dep)$

- Σ – skończony zbiór liter (atomowych akcji)
- $dep \subseteq \Sigma \times \Sigma$ – symetryczna i zwrotna relacja zależności
- $ind = (\Sigma \times \Sigma) \setminus dep$ – relacja niezależności
- $\equiv_\theta \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$ – relacja równoważności

$$\Sigma = \{\ a, b, c, d\}$$

dep

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & b \arrow[d, dash] \\ d \arrow[r, dash] & c \end{tikzcd}$$

ind

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, dash] & b \arrow[dl, dash] \\ d & c \end{tikzcd}$$

$$abdaacda \ \equiv_\theta \ adbcaada$$

$$abdaacda \longrightarrow adbaacda$$

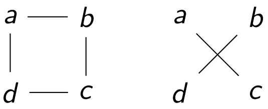
$$adbaacda \longrightarrow adbacada$$

Alfabet współbieżny $\theta = (\Sigma, dep)$

- Σ – skończony zbiór liter (atomowych akcji)
- $dep \subseteq \Sigma \times \Sigma$ – symetryczna i zwrotna relacja zależności
- $ind = (\Sigma \times \Sigma) \setminus dep$ – relacja niezależności
- $\equiv_\theta \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$ – relacja równoważności

$$\Sigma = \{\, a, b, c, d \}$$

dep *ind*



$$abdaacda \equiv_\theta adbcaada$$

$$abdaacda \longrightarrow adbaacda$$

$$adbaacda \longrightarrow adbacada$$

$$adbacada \longrightarrow adbcaada$$

Kwadraty

Faktor (podsłowo) postaci $u \cdot u$.

Kwadraty

Faktor (podsłowo) postaci $u \cdot u$.

Kwadraty przemienne (abelowe)

Faktor postaci $u \cdot v$, gdzie $\forall_{a \in \Sigma}\ |u|_a = |v|_a$.

$$bcbacb \cdot bcabcb \qquad \cancel{bccacc \cdot bbabbb}$$

Kwadraty

Faktor (podsłowo) postaci $u \cdot u$.

Kwadraty przemienne (abelowe)

Faktor postaci $u \cdot v$, gdzie $\forall_{a \in \Sigma}\ |u|_a = |v|_a$.

$$bcbacb \cdot bcabcb \qquad \cancel{bccacc \cdot bbabbb}$$

Faktor u, gdzie $\forall_{a \in \Sigma}\ |u|_a$ jest parzysta.

$$bccaccbbabbb \longrightarrow abbbcc \cdot abbbcc$$

Kwadraty częściowo-przemienne (Θ-kwadraty)

$dep: \; c \text{ —— } a \text{ —— } b$

Kwadraty częściowo-przemienne (Θ-kwadraty)

$dep: \; c \text{ —— } a \text{ —— } b$

Faktory postaci $u \cdot v$, gdzie $u \equiv_\theta v$

$bcbabc \cdot bbcacb$

$\cancel{bcbacb \cdot bcabcb}$

$\cancel{bcbabb \cdot ccbacb}$

Kwadraty częściowo-przemienne (Θ-kwadraty)

$dep: \; c \text{ --- } a \text{ --- } b$

Faktory postaci $u \cdot v$, gdzie $u \equiv_\theta v$

$bcbabc \cdot bbcacb$

$\cancel{bcbacb \cdot bcabcb}$

$\cancel{bcbabb \cdot ccbacb}$

Faktory u, gdzie dla pewnego v zachodzi $u \equiv_\theta vv$.

$bcbabc \cdot bbcacb$

$bcbabb \cdot ccbacb$

$\cancel{bcbacb \cdot bcabcb}$

Kwadraty częściowo-przemienne (Θ-kwadraty)

$dep: \; c$ —— a —— b

Faktory postaci $u \cdot v$, gdzie $u \equiv_\theta v$

$bcbabc \cdot bbcacb$ $\quad$ ~~$bcbacb \cdot bcabcb$~~ $\quad$ ~~$bcbabb \cdot ccbacb$~~

Faktory u, gdzie dla pewnego v zachodzi $u \equiv_\theta vv$.

$bcbabc \cdot bbcacb$

$bcbabb \cdot ccbacb$ $\quad$ ~~$bcbacb \cdot bcabcb$~~

Kwadraty to Θ-kwadraty z pełną relacją zależności (maksymalną). Kwadraty przemienne to Θ-kwadraty z identycznościową relacją zależności (minimalną).

Słowa bez kwadratów częściowo-przemiennych (Θ-bezkwadratowe)

$dep: \; c - a \qquad b$

Słowa bez kwadratów częściowo-przemiennych (Θ-bezkwadratowe)

$dep: \; c$ —— $a \qquad b$

Słowa bez faktorów postaci $u \cdot v$, gdzie $u \equiv_\theta v$

$babcac \qquad cabcba \rightarrow (cab)(cba) \rightarrow (cab)(cab)$

Słowa bez kwadratów częściowo-przemiennych (Θ-bezkwadratowe)

$dep: \; c — a \qquad b$

Słowa bez faktorów postaci $u \cdot v$, gdzie $u \equiv_\theta v$

$babcac \qquad cabcba \rightarrow (cab)(cba) \rightarrow (cab)(cab)$

Słowa bez faktorów u, gdzie dla pewnego v zachodzi $u \equiv_\theta vv$.

$bcbabc \qquad babcac \rightarrow (bacbac) \rightarrow (bac)(bac)$

Słowa bez kwadratów częściowo-przemiennych (Θ-bezkwadratowe)

$dep: \; c - a \qquad b$

Słowa bez faktorów postaci $u \cdot v$, gdzie $u \equiv_\theta v$

$babcac \qquad cabcba \rightarrow (cab)(cba) \rightarrow (cab)(cab)$

Słowa bez faktorów u, gdzie dla pewnego v zachodzi $u \equiv_\theta vv$.

$bcbabc \qquad babcac \rightarrow (bacbac) \rightarrow (bac)(bac)$

Słowa w takie, że żadne słowo $x \equiv_\theta w$ nie zawiera faktorów postaci $u \cdot u$.

$bcbabc \qquad bcbabc \rightarrow bbcabc \rightarrow (b)(b)cabc$

Słowa bez kwadratów częściowo-przemiennych (Θ-bezkwadratowe)

$dep: \ c - a \qquad b$

Słowa bez faktorów postaci $u \cdot v$, gdzie $u \equiv_\theta v$

$babcac \qquad cabcba \to (cab)(cba) \to (cab)(cab)$

Słowa bez faktorów u, gdzie dla pewnego v zachodzi $u \equiv_\theta vv$.

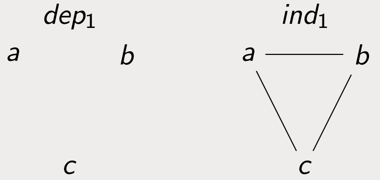
$bcbabc \qquad babcac \to (bacbac) \to (bac)(bac)$

Słowa w takie, że żadne słowo $x \equiv_\theta w$ nie zawiera faktorów postaci $u \cdot u$.

$bcbabc \qquad bcbabc \to bbcabc \to (b)(b)cabc$

1° $\theta_1 = (\Sigma, dep_1)$

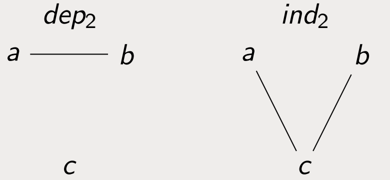
$\Sigma = \{a, b, c\}$



- Mamy **117** słów θ_1-bezkwadratowych (do siedmioliterowych)
- θ_1-bezkwadratowość $=$ bezkwadratowość przemienna

2º $\theta_2 = (\Sigma, dep_2)$

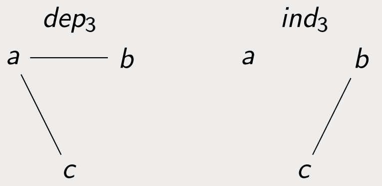
$\Sigma = \{a, b, c\}$



- Mamy **289** słów θ_2-bezkwadratowych (do piętnastoliterowych)

3º $\theta_3 = (\Sigma, dep_3)$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

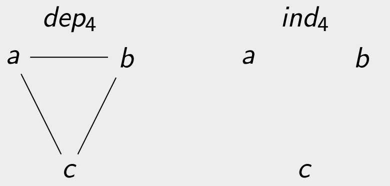


- Liczba słów θ_3-bezkwadratowych jest nieskończona

  Artykuł On the number of partially abelian square-free words over three-letter alphabet

4º $\theta_4 = (\Sigma, dep_4)$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$



- Liczba słów θ_4-bezkwadratowych jest nieskończona
- θ_4-bezkwadratowość $=$ bezkwadratowość
- Przykład słowa nieskończonego - na bazie słowa Thue-Morse'a

$\theta_3 = \theta = (\Sigma, dep)$

$$\Sigma = \{a, b, c\} \qquad dep : \begin{array}{ccc} a & \text{---} & b \\ & \diagdown & \\ & & c \end{array}$$

$\theta_3 = \theta = (\Sigma, dep)$

$$\Sigma = \{a, b, c\} \qquad\qquad dep : \begin{array}{ccc} a & \text{---} & b \\ & \diagdown & \\ & & c \end{array}$$

Problem

Skonstruować v^∞ – nieskończone słowo θ-bezkwadratowe nad alfabetem współbieżnym $\theta = (\Sigma, dep)$ z jedną parą niezależnych liter.

$\theta_3 = \theta = (\Sigma, dep)$

$$\Sigma = \{a, b, c\} \qquad dep : \begin{tikzcd} a \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & b \\ c & \end{tikzcd}$$

Problem

Skonstruować v^∞ – nieskończone słowo θ-bezkwadratowe nad alfabetem współbieżnym $\theta = (\Sigma, dep)$ z jedną parą niezależnych liter.

Artykuł Partially abelian square-free words

Lemat (Cori, Formisano 1990)

Każde słowo θ-bezkwardatowe jest zbudowane z faktorów 6 typów: ab, ac, $abcb$, $acbc$, acb, abc.

Lemat (Cori, Formisano 1990)

Każde słowo θ-bezkwardatowe jest zbudowane z faktorów 6 typów: *ab*, *ac*, *abcb*, *acbc*, *acb*, *abc*.

Lemat (Cori, Formisano 1990)

Każde słowo θ-bezkwardatowe jest zbudowane z faktorów 6 typów: ab, ac, $abcb$, $acbc$, acb, abc.

Warunek **F** (Cori, Formisano 1990)

Słowo $w \in \Sigma^*$ spełnia warunek **(F)** jeśli ani *abca* ani *acba* nie są faktorami w, gdzie $a, b, c \in \theta = (\Sigma, dep)$.

Lemat (Cori, Formisano 1990)

Każde słowo θ-bezkwardatowe jest zbudowane z faktorów 6 typów: ab, ac, $abcb$, $acbc$, acb, abc.

Warunek F (Cori, Formisano 1990)

Słowo $w \in \Sigma^*$ spełnia warunek **(F)** jeśli ani $abca$ ani $acba$ nie są faktorami w, gdzie $a, b, c \in \theta = (\Sigma, dep)$.

Twierdzenie (Cori, Formisano 1990)

Każde nieskończone słowo bezkwadratowe $w \in \Sigma^*$ które zaczyna się literą a i spełnia warunek **(F)** jest θ-bezkwadratowe.

$\theta_3 = \theta = (\Sigma, dep)$

$$\Sigma = \{a, b, c\} \qquad dep : \begin{tikzcd} a \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & b \\ c & \end{tikzcd}$$

$\theta_3 = \theta = (\Sigma, dep)$

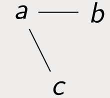
$$\Sigma = \{a, b, c\} \qquad dep : \begin{array}{ccc} a & — & b \\ \diagdown & & \\ & c & \end{array}$$

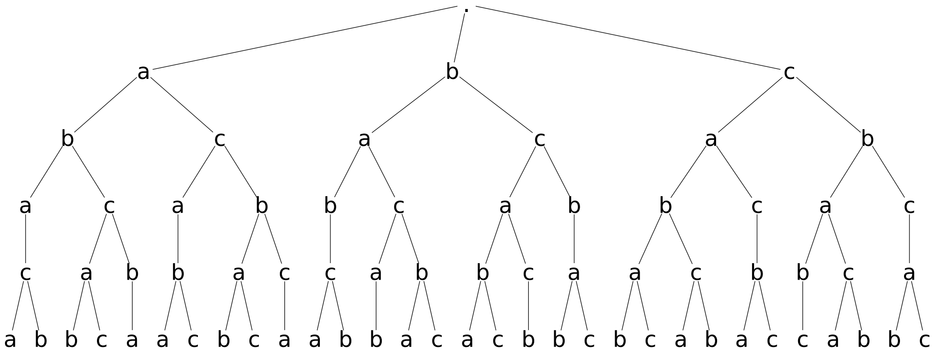
Problem

Skonstruować v^{∞} – leksykograficznie minimalne nieskończone słowo θ-bezkwadratowe nad alfabetem współbieżnym $\theta = (\Sigma, dep)$ z jedną parą niezależnych liter.

$\theta = (\Sigma, dep)$

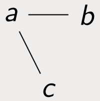
$$\Sigma = \{a, b, c\} \qquad dep :$$

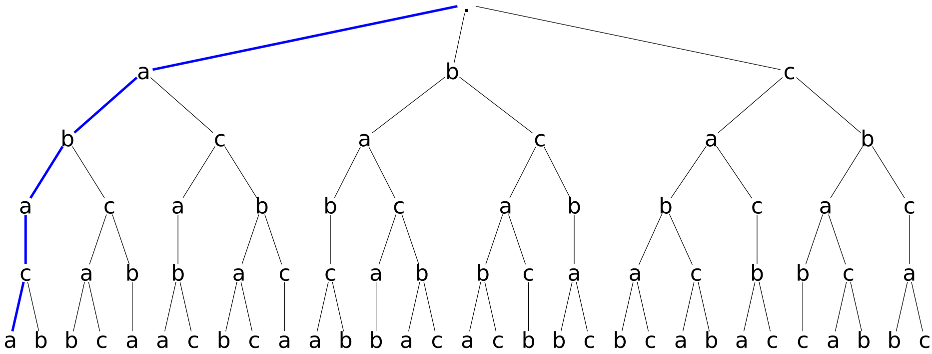


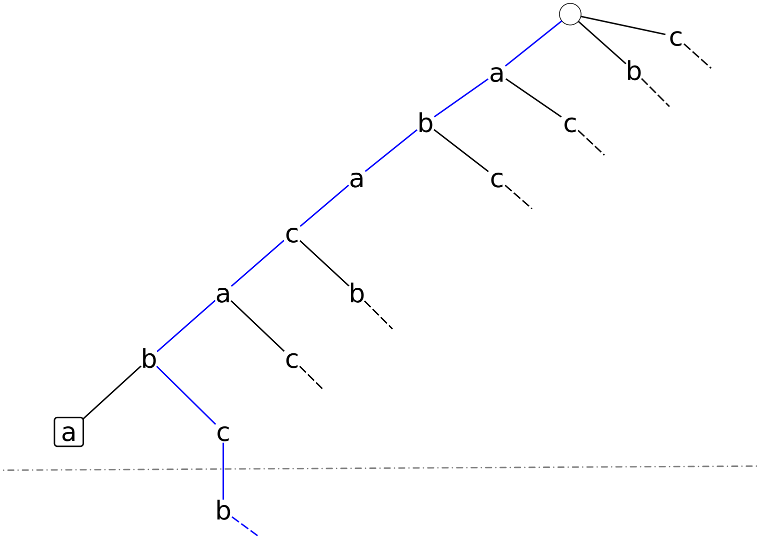


$\theta = (\Sigma, dep)$

$\Sigma = \{a, b, c\}$ $\quad$ $dep :$






a
b
c
c
b
c
a
c
b
a
c
b
c
a
b
c

Definicja

$$M = \begin{cases} A & \longrightarrow & ab \\ B & \longrightarrow & ac \\ C & \longrightarrow & abcb \\ D & \longrightarrow & acbc \end{cases}$$

Definicja

$$M = \begin{cases} A \longrightarrow ab \\ B \longrightarrow ac \\ C \longrightarrow abcb \\ D \longrightarrow acbc \end{cases}$$

$$\underbrace{a\ b}_{A}\underbrace{a\ c}_{B}\underbrace{a\ b\ c\ b}_{C}\underbrace{a\ c}_{B}\underbrace{a\ b}_{A}\underbrace{a\ c\ b\ c}_{D}\underbrace{a\ b}_{A}\underbrace{a\ c}_{B}\underbrace{a\ b\ c\ b}_{C}\underbrace{a\ c\ b\ c}_{D}\underbrace{a\ b\ c\ b}_{C}\ldots$$

Definicja

$$m = \begin{cases} A \longrightarrow BCB \\ B \longrightarrow ADA \\ C \longrightarrow BCDCB \\ D \longrightarrow ADCDA \end{cases} \qquad x_i = \begin{cases} AB & \text{for} \quad i = 1 \\ A \cdot m(x_{i-1}) \cdot B & \text{for} \quad i > 1 \end{cases}$$

Definicja

$$m = \begin{cases} A \longrightarrow BCB \\ B \longrightarrow ADA \\ C \longrightarrow BCDCB \\ D \longrightarrow ADCDA \end{cases} \qquad x_i = \begin{cases} AB & \text{for} \quad i = 1 \\ A \cdot m(x_{i-1}) \cdot B & \text{for} \quad i > 1 \end{cases}$$

$x_1 = AB$

$x_2 = ABCBADAB$

$x_3 = ABCBADABCDCBADABCBADCDABCBADAB$

$x_4 =$
$ABCBADABCDCBADABCBADCDABCBADABCDCBAD\ldots$

$\vdots$

Twierdzenie

Język $L_x = \{x_i : i > 0\}$ zawiera tylko słowa bezkwadratowe.

Twierdzenie

Język $L_x = \{x_i : i > 0\}$ zawiera tylko słowa bezkwadratowe.

Idea dowodu

$$x_k = \alpha \cdot u \cdot u \cdot \beta \qquad \text{(najkrótsze możliwe)}$$

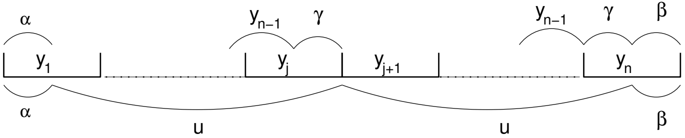
Twierdzenie

Język $L_x = \{x_i : i > 0\}$ zawiera tylko słowa bezkwadratowe.

Idea dowodu

$$x_k = \alpha \cdot u \cdot u \cdot \beta \qquad \text{(najkrótsze możliwe)}$$

1°



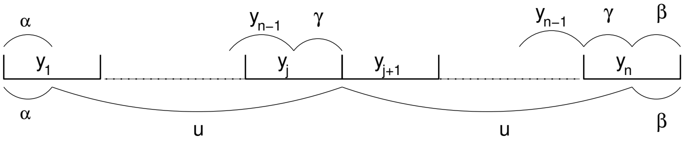
Twierdzenie

Język $L_x = \{x_i : i > 0\}$ zawiera tylko słowa bezkwadratowe.

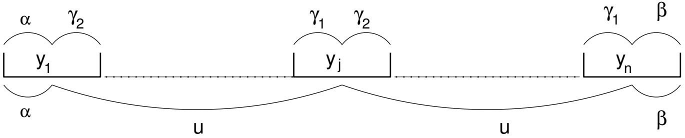
Idea dowodu

$$x_k = \alpha \cdot u \cdot u \cdot \beta \qquad \text{(najkrótsze możliwe)}$$

1º



2º



Twierdzenie

Język $L_{dep} = \{M(x_i) : \ i > 0\}$ zawiera wyłącznie słowa θ-bezkwadratowe.

Twierdzenie

Język $L_{dep} = \{M(x_i) : \; i > 0\}$ zawiera wyłącznie słowa θ-bezkwadratowe.

Idea dowodu

Niech $w \in L_{dep}$. Wówczas:

- w jest bezkwadratowe – z definicji L_{dep} i bezkwadratowości L_x

Twierdzenie

Język $L_{dep} = \{M(x_i) : \ i > 0\}$ zawiera wyłącznie słowa θ-bezkwadratowe.

Idea dowodu

Niech $w \in L_{dep}$. Wówczas:

- w jest bezkwadratowe – z definicji L_{dep} i bezkwadratowości L_x
- w rozpoczyna się literą a – z definicji L_x oraz M

Twierdzenie

Język $L_{dep} = \{M(x_i) : \ \ i > 0\}$ zawiera wyłącznie słowa θ-bezkwadratowe.

Idea dowodu

Niech $w \in L_{dep}$. Wówczas:

- w jest bezkwadratowe – z definicji L_{dep} i bezkwadratowości L_x
- w rozpoczyna się literą a – z definicji L_x oraz M
- w spełnia warunek **(F)** – z definicji M

Twierdzenie

Język $L_{dep} = \{M(x_i) : \ i > 0\}$ zawiera wyłącznie słowa θ-bezkwadratowe.

Idea dowodu

Niech $w \in L_{dep}$. Wówczas:

- w jest bezkwadratowe – z definicji L_{dep} i bezkwadratowości L_x
- w rozpoczyna się literą a – z definicji L_x oraz M
- w spełnia warunek **(F)** – z definicji M

Stąd w jest θ-bezkwadratowe.

∎

Twierdzenie

Nieskończone słowo $w \in \Sigma^*$ które rozpoczyna się literą a, ale nie rozpoczyna się prefiksem $abca$ ani $acba$, jest θ-bezkwadratowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest słowem bezkwadratowe oraz składa się tylko z faktorów 4 typów:
ab, ac, $abcb$, $acbc$.

Twierdzenie

Nieskończone słowo $w \in \Sigma^*$ które rozpoczyna się literą a, ale nie rozpoczyna się prefiksem $abca$ ani $acba$, jest θ-bezkwadratowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest słowem bezkwadratowe oraz składa się tylko z faktorów 4 typów:
ab, ac, $abcb$, $acbc$.

Twierdzenie

Jeśli $M(m(M^{-1}(w)))$ jest słowem θ-bezkwadratowym, to w również jest słowem θ-bezkwadratowym.

Lista metafaktorów zabronionych wewnątrz słów bezkwadratowych

- ABA

Lista metafaktorów zabronionych wewnątrz słów bezkwadratowych

- ABA

$(AB)(AB)$
$ABAD \rightarrow (abac)(abac)dc$

Lista metafaktorów zabronionych wewnątrz słów bezkwadratowych

- ABA
- BAB

Lista metafaktorów zabronionych wewnątrz słów bezkwadratowych

- ABA
- BAB
- CBC

$(CB)(CB)$
$CBCD \rightarrow (abcbac)(abcbac)dc$

Lista metafaktorów zabronionych wewnątrz słów bezkwadratowych

- ABA
- BAB
- CBC
- DAD

Lista metafaktorów zabronionych wewnątrz słów bezkwadratowych

- ABA
- BAB
- CBC
- DAD
- ADCB

DADCB

Lista metafaktorów zabronionych wewnątrz słów bezkwadratowych

- ABA
- BAB
- CBC
- DAD
- ADCB

$DADCB$
$ABADCB$

Lista metafaktorów zabronionych wewnątrz słów bezkwadratowych

- ABA
- BAB
- CBC
- DAD
- ADCB

$\textcolor{red}{DAD}CB$
$\textcolor{red}{ABA}DCB$
$CBAD\textcolor{red}{CBC}$

Lista metafaktorów zabronionych wewnątrz słów bezkwadratowych

- ABA
- BAB
- CBC
- DAD
- ADCB

DADCB
ABADCB
CBADCBC
CBADCBAB

Lista metafaktorów zabronionych wewnątrz słów bezkwadratowych

- ABA
- BAB
- CBC
- DAD
- ADCB

DADCB
ABADCB
CBADCBC
CBADCBAB
(CBAD)(CBAD)

Lista metafaktorów zabronionych wewnątrz słów bezkwadratowych

- ABA
- BAB
- CBC
- DAD
- ADCB
- BCDA

Lemat

Niech $u, v \in L_{dep}$. Wówczas albo u jest prefiksem v albo v jest prefiksem u.

Lemat

Niech $u, v \in L_{dep}$. Wówczas albo u jest prefiksem v albo v jest prefiksem u.

abac

abacabcbacabacbcabac

abacabcbacabacbcabacabcbacbcabcbacabacbcabacabcbacabacbc . . .

⋮

Lemat

Niech $u, v \in L_{dep}$. Wówczas albo u jest prefiksem v albo v jest prefiksem u.

Lemat

Dla każdego $n > 0$ istnieje słowo $v \in L_{dep}$ takie, że $|v| > n$.

abac

abacabcbacabacbcabac

abacabcbacabacbcabacabcbacbcabcbacabacbcabacabcbacabacbc ...

$\vdots$

Lemat

Niech $u, v \in L_{dep}$. Wówczas albo u jest prefiksem v albo v jest prefiksem u.

Lemat

Dla każdego $n > 0$ istnieje słowo $v \in L_{dep}$ takie, że $|v| > n$.

Definicja

Zdefiniujmy nieskończone słowo $v^{\infty} = \lim(L_{dep})$.

abac

abacabcbacabacbcabac

abacabcbacabacbcabacabcbacbcabcbacabacbcabacabcbacabacbc ...

$\vdots$

Zadanie

Słowo v^{∞} jest minimalnym leksykograficznie θ-bezkwadratowym słowem nieskończonym.

Dziękuję za uwagę