

WYMIARY, SYMETRIE I ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ EWOLUCYJNYCH

Vsevolod Vladimirov

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica

Wydział Matematyki Stosowanej

Będlewo 20 marca 2014 r.

Plan

- ▶ Twierdzenie II Buckinghama. Rozwiązanie zagadnienia o *wybuchu cieplnym*.
- ▶ Twierdzenie porównawcze i rola rozwiązań samopodobnych w zagadnieniach parabolicznych.
- ▶ Jednoparametrowa grupa przekształceń w R^n .
Niezmienniczość rozmaitości algebraicznej.
- ▶ Symetrie równań różniczkowych i rozwiązania niezmiennicze.
- ▶ Przykłady.
- ▶ Ogólna strategia.

Równanie transportu ciepła

Energia cieplna skumulowana w obszarze V wyraża się następującym wzorem:

$$E = \int_V c T(t, x) dx$$

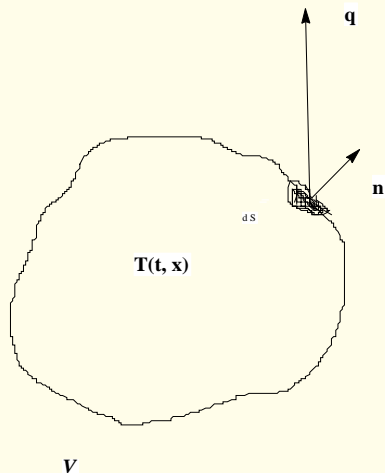
gdzie c -pojemność cieplna, $T(t, x)$ -temperatura.

Zmianę energii cieplnej w V powoduje potok cieplny \vec{q} płynący przez powierzchnię ∂V ;

a zatem, równanie bilansu energii będzie miało postać

$$\frac{dE}{dt} = \int_V c \frac{\partial}{\partial t} T(t, x) dx = - \int_{\partial V} \vec{q} d\vec{S}, \quad (1)$$

gdzie $d\vec{S} = dS \vec{n}$ - ukierunkowany element powierzchni, \vec{n} - wektor jednostkowy, skierowany na zewnątrz powierzchni.



Rysunek : Ilustracja do równania bilansu energii

Zgodnie z prawem Ficka,

$$\vec{q} = -\tilde{\kappa}(T; t, x)\nabla T,$$

gdzie $\tilde{\kappa}(T; t, x)$ -nieujemny współczynnik transportu.

Wykorzystując powyższą równość, oraz stosując twierdzenie Stokesa do drugiego wyrazu w prawej stronie równania (1), otrzymamy:

$$\int_V \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} - \mathbf{div} \kappa(T; t, x) \mathbf{grad} T \right\} dx = 0,$$

gdzie $\kappa(T; t, x) = \tilde{\kappa}(T; t, x)/c$.

Z dowolności objętości V wynika równanie

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = \vec{\nabla} \kappa(T; t, x) \vec{\nabla} T(t, x). \quad (2)$$

ZASADA FUNDAMENTALNA:

Prawa fizyczne nie zależą od tego, w jakich jednostkach są mierzone podstawowe wielkości

na przykład

kilogram, metr, sekunda

czy

gram, centymetr, minuta

Jednostki się dzielą na podstawowe i pochodne.

jeżeli wybierzemy jako jednostki podstawowe

- ▶ długość, $x[L]$
- ▶ masę $m[M]$
- ▶ czas $t[T]$

to wszystkie inne **jednostki mechaniczne** wyrażą się przez te trzy, na przykład

- ▶ prędkość $v \frac{[L]}{[T]}$
- ▶ siła $F \frac{[M] \cdot [L]}{[T^2]}$
- ▶ przyspieszenie $\frac{[L]}{[T^2]}$

Istnieje możliwość przedstawienia praw fizycznych w **postaci bezwymiarowej**.

Niech mamy pewne prawo

$$a = f(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+n}), \quad (3)$$

przedstawiające wielkość fizyczną a jako funkcję $m + n$ wielkości $a_1, \dots, a_m, \dots, a_{m+n}$.

Zakładamy ręk:

- ▶ a_1, \dots, a_m - jednostki podstawowe;
- ▶ a, a_{m+1}, \dots, a_n - jednostki pochodne,
- ▶ zachodzą wzory:

$$\begin{cases} a_{m+j} = \tilde{\Pi}_{m+j} a_1^{r_j^1}, \dots, a_m^{r_j^m} \\ a = \tilde{\Pi} a_1^{r_1}, \dots, a_m^{r_m} \end{cases}$$

$\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi}_{m+j}$ - parametry bezwymiarowe.

Twierdzenie

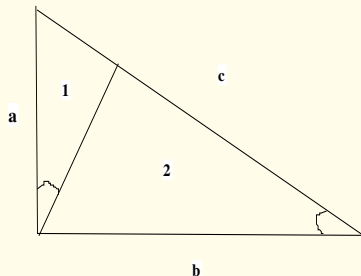
(Π -Buckingham) Zależność

$$a = f(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+n}),$$

- ▶ *(a) można przedstawić w postaci bezwymiarowej*

$$\tilde{\Pi} = \tilde{\Phi}(\tilde{\Pi}_k) \quad 1 \leq k \leq r$$

- ▶ *(b) Liczba r jest nie większa od n*



$$S = f(c, \alpha)$$

$c[L]$ - podstawowa; $S[L^2]$ -pochodna; $\alpha[-]$;

$$\text{Tw. II} \rightarrow S = c^2 \varphi(\alpha);$$

$$S_1 = f(a, \alpha) = a^2 \varphi(\alpha)$$

$$S_2 = f(b, \alpha) = b^2 \varphi(\alpha)$$

$$S = S_1 + S_2 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Zagadnienie o wybuchu cieplnym (przypadek liniowy).

W chwili $t = 0$ w punkcie $0 = x \in R$ uwalnia się energia Q ,
 $\kappa = \text{const}$.

Postawienie zagadnienia (uwaga, dokonujemy podmiiany $T \rightarrow u$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in R, \quad (4)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \neq 0, \quad (5)$$

$$\int_R u(t, x) dx = Q, \quad Q = \text{const} \quad (6)$$

Poszukujemy rozwiązanie w postaci

$$u = f(t, x, \kappa, Q), \quad (7)$$

Jednostki podstawowe:

$$t[T], \quad \kappa \left[\frac{L^2}{T} \right], \quad Q[KL].$$

Pozostałe dwie można wyrazić przez nie w następujący sposób:

$$u = \Pi \frac{Q}{\sqrt{\kappa t}}, \quad x = \xi \sqrt{\kappa t}, \quad (8)$$

gdzie Π , ξ -parametry bezwymiarowe.

Zgodnie z **twierdzeniem Buckinghama**, $\Pi = \varphi(\xi)$, zatem

$$u = \frac{Q}{\sqrt{\kappa t}} \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\kappa t}}. \quad (9)$$

Po podstawieniu tych wzorów do równania transportu, otrzymamy równanie

$$\frac{Q}{2t\sqrt{\kappa t}} [2\ddot{\varphi} + \varphi + \xi \dot{\varphi}] = 0,$$

równoważne z

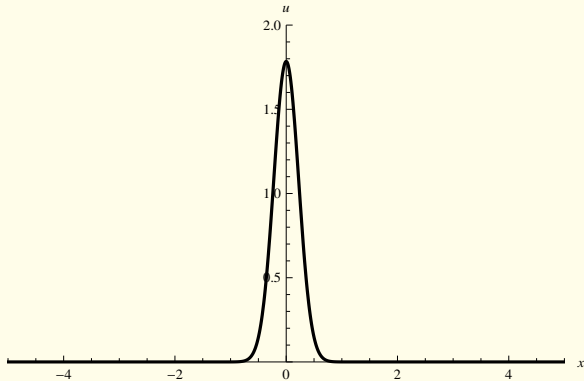
$$\frac{d}{d\xi} \{2\dot{\varphi} + \xi \varphi\} = 0.$$

Rozwiązując go, otrzymamy

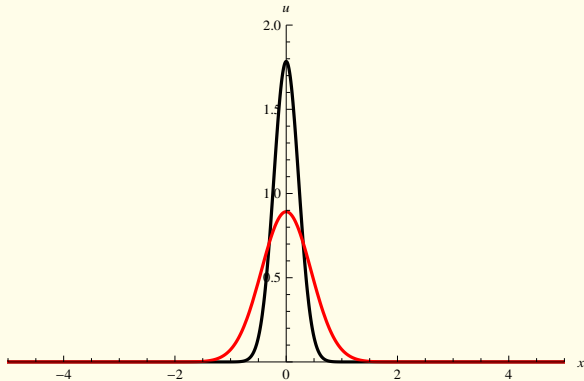
$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2/4}.$$

Ostatecznie

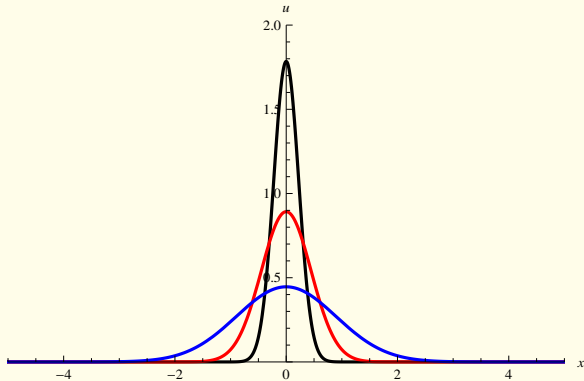
$$u(t, x) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-x^2/(4\kappa t)} \quad (10)$$



Rysunek : Rozwiązanie zagadnienia o wybuchu cieplnym, przypadek liniowy: $\kappa = Q = 1$, $t_1 = 0.025$



Rysunek : Rozwiązanie zagadnienia o wybuchu cieplnym, przypadek liniowy: $\kappa = Q = 1$, $t_1 = 0.025$; $t_2 = 0.1$



Rysunek : Rozwiązanie zagadnienia o wybuchu cieplnym, przypadek liniowy: $\kappa = Q = 1$, $t_1 = 0.025$; $t_2 = 0.1$; $t_3 = 0.4$

Zagadnienie o wybuchu cieplnym (problem nieliniowy).

Rozpatrzmy zagadnienie o wybuchu cieplnym

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad t > 0, \quad x \in R, \quad \kappa = const, \quad (11)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \neq 0, \quad (12)$$

$$\int_R u(t, x) dx = Q, \quad Q = const \quad (13)$$

Poszukujemy rozwiązanie w postaci

$$u = f(t, x, \kappa, Q), \quad (14)$$

- ▶ Jednostki podstawowe:

$$t[T], \quad \kappa \left[\frac{L^2}{TK} \right], \quad Q [K L].$$

- ▶ Jednostki pochodne:

$$u = \Pi \frac{Q^{2/3}}{(\kappa t)^{1/3}}, \quad x = \xi (\kappa t Q)^{1/3}, \quad \Pi[-], \quad \xi[-].$$

Zgodnie z twierdzeniem Buckinghama $\Pi = \varphi(\xi)$, i rozwiązanie należy szukać w postaci

$$u = \frac{Q^{2/3}}{(\kappa t)^{1/3}} \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(\kappa t Q)^{1/3}}. \quad (15)$$

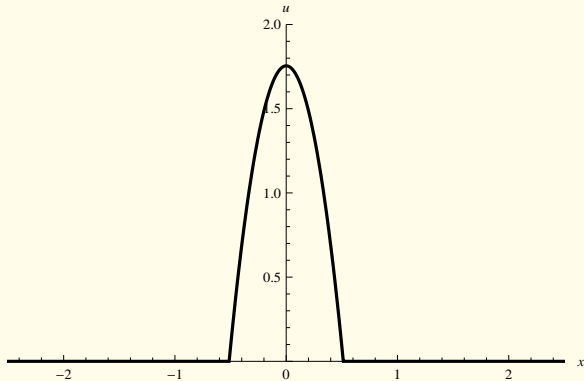
Po podstawieniu tych wzorów do równania transportu otrzymamy równanie zwyczajne

$$\frac{d}{d\xi} (3\varphi\dot{\varphi} + \xi\varphi) = 0.$$

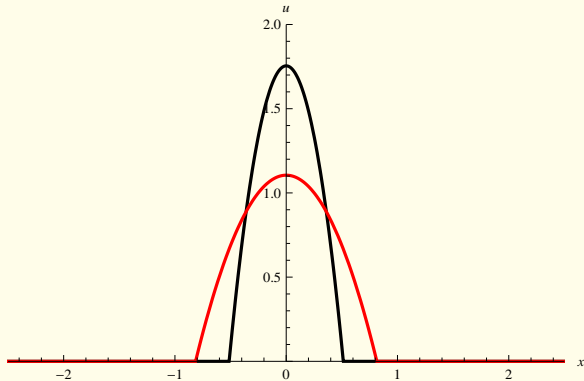
Rozwiązując równanie otrzymamy: $\varphi = C_0 - \frac{\xi^2}{6}$.

Ostatecznie, zakładając nieujemność funkcji u , oraz wykorzystując warunek $\int u(t, x) dx = Q$ otrzymujemy rozwiązanie

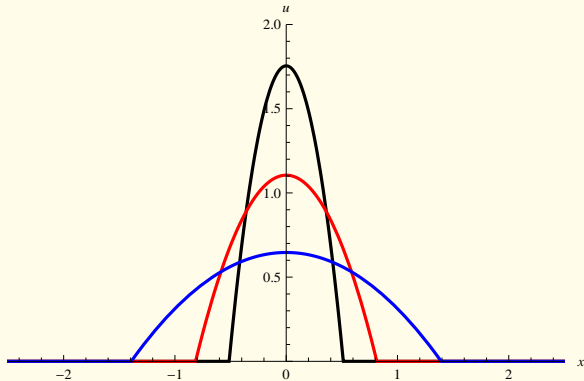
$$u = \frac{1}{6\kappa t} \begin{cases} x_f^2 - x^2, & \text{gdzie } |x| < x_f = \left(\frac{9\kappa Q t}{2}\right)^{1/3}, \\ 0 & \text{gdzie indziej.} \end{cases} \quad (16)$$



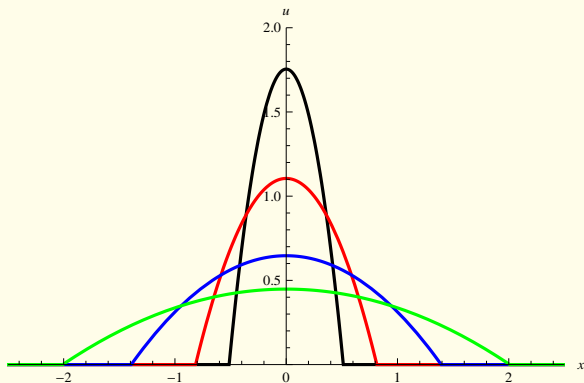
Rysunek : Rozwiązanie zagadnienia o wybuchu cieplnym, przypadek nieliniowy: $\kappa(u) = u$, $Q = 1.2$, $t_1 = 0.025$



Rysunek : Rozwiązanie zagadnienia o wybuchu cieplnym, przypadek **nieliniowy:** $\kappa(u) = u$, $Q = 1.2$, $t_1 = 0.025$, $t_2 = 0.1$



Rysunek : Rozwiązanie zagadnienia o wybuchu cieplnym, przypadek nieliniowy: $\kappa(u) = u$, $Q = 1.2$, $t_1 = 0.025$, $t_2 = 0.1$, $t_3 = 0.5$



Rysunek : Rozwiązanie zagadnienia o wybuchu cieplnym, przypadek **nieliniowy**:

$$\kappa(u) = u, \quad Q = 1.2, \quad t_1 = 0.025, \quad t_2 = 0.1, \quad t_3 = 0.5, \quad t_4 = 1.5$$

O roli rozwiązań samopodobnych. Zasada maksimum i twierdzenie porównawcze.

Twierdzenie (zasada MAKSIMUM)

Maksimum rozwiązania $u(x, t)$ zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] & K(u) > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (17)$$

w dowolnym momencie czasu $t > 0$ nie przekracza maksimum danych początkowych:

$$\max u(t, x) \leq \max u_0(x).$$

Z zasady maksimum wynikają twierdzenia porównawcze:

Twierdzenie (porównawcze)

Niech $u^{(1)}(t, x)$, $u(t, x)$, $u^{(2)}(t, x)$ - rozwiązania równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

odpowiadające danym Cauchy'ego

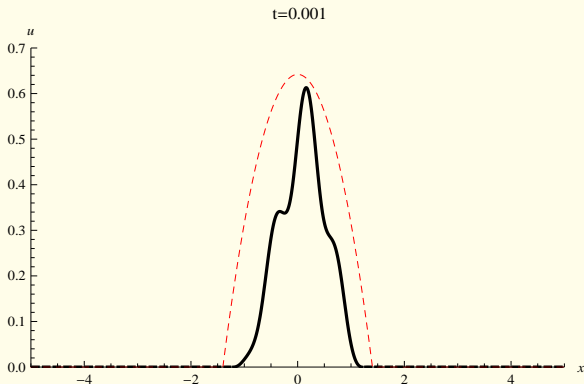
$$u_0^{(1)}(x), \quad u_0(x), \quad u_0^{(2)}(x).$$

Wówczas, jeśli

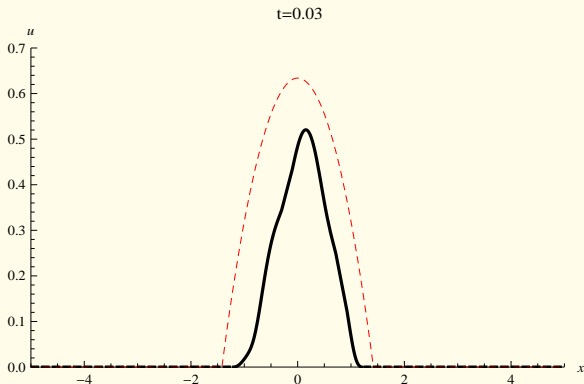
$$u_0^{(1)}(x) \leq u_0(x) \leq u_0^{(2)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

to $\forall t > 0$

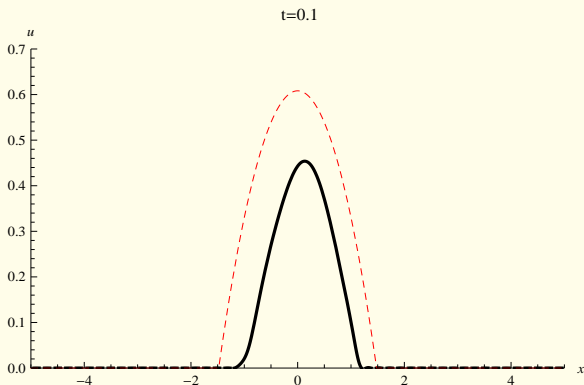
$$u^{(1)}(t, x) \leq u(t, x) \leq u^{(2)}(t, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



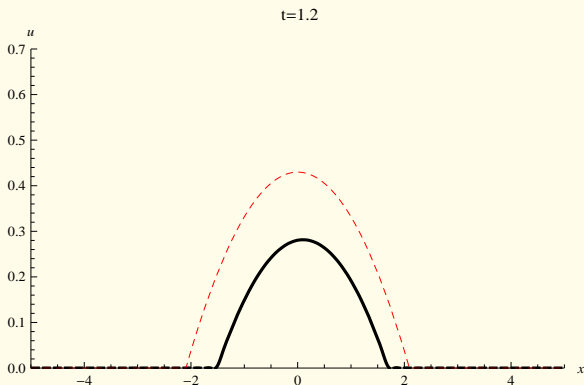
Rysunek : Rozwiązanie numeryczne zagadnienia Cauchy'ego (linia czarna) na tle rozwiązania zagadnienia o wybuchu cieplnym, spełniającego założenia twierdzenia porównawczego (linia czerwona przerywana), przy $t = 0.001$



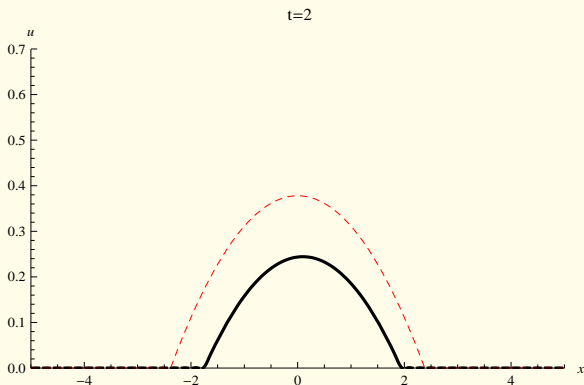
Rysunek : Rozwiązanie numeryczne zagadnienia Cauchy'ego (linia czarna) na tle rozwiązania zagadnienia o wybuchu cieplnym, spełniającego założenia twierdzenia porównawczego (linia czerwona przerywana), przy $t = 0.03$



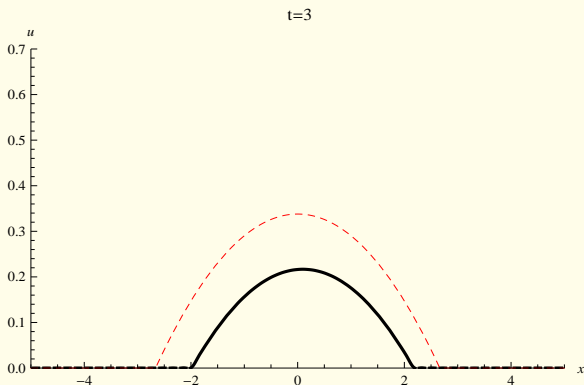
Rysunek : Rozwiązanie numeryczne zagadnienia Cauchy'ego (linia czarna) na tle rozwiązania zagadnienia o wybuchu cieplnym, spełniającego założenia twierdzenia porównawczego (linia czerwona przerywana), przy $t = 0.1$



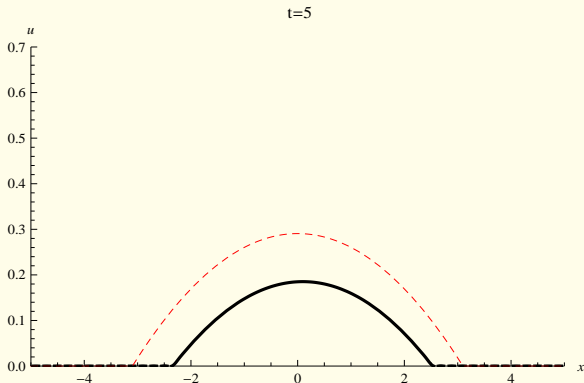
Rysunek : Rozwiązanie numeryczne zagadnienia Cauchy'ego (linia czarna) na tle rozwiązania zagadnienia o wybuchu cieplnym, spełniającego założenia twierdzenia porównawczego (linia czerwona przerywana), przy $t = 1.2$



Rysunek : Rozwiązanie numeryczne zagadnienia Cauchy'ego (linia czarna) na tle rozwiązania zagadnienia o wybuchu cieplnym, spełniającego założenia twierdzenia porównawczego (linia czerwona przerywana), przy $t = 2$



Rysunek : Rozwiązanie numeryczne zagadnienia Cauchy'ego (linia czarna) na tle rozwiązania zagadnienia o wybuchu cieplnym, spełniającego założenia twierdzenia porównawczego (linia czerwona przerywana), przy $t = 3$



Rysunek : Rozwiązanie numeryczne zagadnienia Cauchy'ego (linia czarna) na tle rozwiązania zagadnienia o wybuchu cieplnym, spełniającego założenia twierdzenia porównawczego (linia czerwona przerywana), przy $t = 5$

Wnioskuemy zatem że duża klasa rozwiązań "naśladuje" w tym przypadku zachowanie się rozwiązań samopodobnych

Nizej usiłujemy spojrzeć na powyższą procedurę uzyskania rozwiązań RRCz od strony matematycznej

Jednoparametrowa grupa przekształceń

Niech U - zbiór otwarty w R^n . Rozpatrzmy jednoparametrową rodzinę przekształceń $T_a : U \rightarrow R^n$

$$[T_a x]^k = \bar{x}^k = f^k(x_1, x_2, \dots, x_n; a), \quad (x_1, \dots, x_n) \in U, \quad (18)$$

$0 \in a \in \Delta \subset R^1$, f^k -gładkie funkcje.

Rodzinę $\{T_a\}_{a \in \Delta}$ nazywamy lokalną jednoparametrową grupą przekształceń, lub **grupą przekształceń Liego**, jeżeli zachodzą własności

$$[T_0 x]^k = f^k(x_1, x_2, \dots, x_n; 0) = x^k$$

oraz

$$\{T_a [T_b x]\}^k = f^k[f(x_1, x_2, \dots, x_n; a); b] = f^k(x_1, x_2, \dots, x_n; a + b).$$

Przykłady.

1. Grupa przesunęć w R^1

$$x' = x + a, \quad x'' = x' + b = x + (a + b)$$

2. Grupa scalingowa w R^1 :

$$x' = e^a x; \quad x'' = e^b x' = e^{a+b} x.$$

3. Grupa obrótów w R^2 :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a, & -\sin a \\ \sin a, & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Definicja

Funkcję

$$\xi^k(x) = \left. \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial a} \right|_{a=0}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

*nazywamy k -tą współrzędną generatora przekształceń
infinitesimalnych*

$$\hat{X} = \sum_{k=1}^m \xi^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Dla $|a| \ll 1$

$$\bar{x}^k = x^k + a \xi^k(x) + O(|a^2|).$$

Twierdzenie

(*Pierwsze Fundamentalne Twierdzenie Liego*). Funkcje $\bar{x}^k = f^k(x; a)$ spełniają następujące zagadnienie początkowe:

$$\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial a} = \xi^k(\bar{x}), \quad \bar{x}^k|_{a=0} = x^k. \quad (19)$$

Odwrotnie, dla dowolnego zbioru funkcji gładkich $\{\xi^k\}_{k=1}^n$ zagadnienie początkowe (19) określa lokalną jednoparametrową grupę dla której funkcje $\{\xi^k\}_{k=1}^n$ tworzą zbiór współrzędnych generatora przekształceń infinitesimalnych.

Zachodzi wzór

$$\bar{x}^k = f^k(x; a) = e^{a\hat{X}}[x^k] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \hat{X}^n[x^k].$$

Generatory niektórych przekształceń infinitezymalnych

1. Dla grupy przesunęć:

$$x' = x + a, \quad \hat{X} = \frac{\partial}{\partial x}$$

2. Dla grupy skalowania:

$$x' = e^a x; \quad \hat{X} = x \frac{\partial}{\partial x}$$

3. Dla grupy obrótów w R^2 :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \hat{X} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

Definicja

Mówimy że zbiór

$$M = \{x \in R^n : \Psi^\nu(x) = 0, \nu = 1, 2, \dots, s < n\}$$

jest niezmienniczy względem T_a jeżeli

$$T_a x = \bar{x} \in M \quad \forall x \in M \quad \leftrightarrow \quad \Psi^\nu(\bar{x}) = 0, \nu = 1, \dots, s.$$

Twierdzenie

Na to by zbiór M był niezmienniczy względem T_a z generatorem \hat{X} , potrzeba i wystarcza by

$$\hat{X} \Psi^\nu(x) \Big|_M = 0 \quad \forall \nu. \quad (20)$$

Przykład.

Zbiór $M : \psi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ jest niezmienniczy względem grupy obrotów

$$\bar{x} = x \cos a - y \sin a, \quad \bar{y} = x \sin a + y \cos a,$$

która ma generator $\hat{X} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$. Przekonujemy się że

$$\left\{ -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right\} [x^2 + y^2 - 1] = -2yx + 2xy = 0$$

Przykład kiedy warunek $\hat{X}\psi = 0$ nie jest spełniony tożsamościowo:

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 \frac{\partial}{\partial x} &\equiv \left[-y \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + y^2)x \frac{\partial}{\partial y} \right] \{x^2 + y^2 - 1\} = \\ &= -2yx + 2xy(x^2 + y^2)|_{x^2+y^2=1} = 0. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy układ równań

$$F^\sigma(x, u, \partial u, \dots \partial^r u) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, s, \quad (21)$$

gdzie $\partial^k u$ oznacza zbiór wszystkich pochodnych cząstkowych funkcji u rzędu k .

Definicja

Mówimy że 1-parametrowa grupa przekształceń

$$\bar{x}^k = f^k(x, u; a), \quad \bar{u}^\alpha = g^\alpha(x, u; a)$$

z generatorem

$$\hat{X} = \sum_{k=1}^n \xi^k(x, u) \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{\alpha=1}^m \eta^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

jest grupą symetrii układu (21), jeżeli odwzorowuje ona każde rozwiązanie gładkie układu (21) w jakieś inne rozwiązanie tego układu.

Równoważna definicja

$$F^\sigma(x, u, \partial u, \dots \partial^r u) = 0 \Leftrightarrow F^\sigma(\bar{x}, \bar{u}, \partial \bar{u}, \dots \partial^r \bar{u}) = 0,$$
$$\sigma = 1, \dots, s$$

Lokalna 1-parametrowa grupa przekształceń

$$\begin{aligned}\bar{x}^k &= f^k(x, u; a) = x^k + a \xi^k(x, u) + O(a^2), \quad k = 1, \dots, n, \\ \bar{u}^\alpha &= g^\alpha(x, u; a) = u^\alpha + a \eta^\alpha(x, u) + O(a^2), \quad \alpha = 1, \dots, m,\end{aligned}$$

z generatorem $\hat{X} = \sum_{k=1}^n \xi^k(x, u) \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{\alpha=1}^m \eta^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$.
automatycznie indukuje jednoparametrową grupę przekształceń
na zbiorze pochodnych cząstkowych wszystkich rzędów:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial \bar{x}_k} &= \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_k} + \zeta_k^\alpha + O(a^2) \\ \frac{\partial^{m_1} \bar{u}^\alpha}{\partial \bar{x}_1^{m_1} \dots \partial \bar{x}_n^{m_n}} &= \frac{\partial^{m_1} u^\alpha}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} + \zeta_{m_1, \dots, m_n}^\alpha + O(a^2)\end{aligned}$$

gdzie $\zeta_{m_1, \dots, m_n}^\alpha$ wyrażają się przez ξ^k , η^α i ich pochodne cząstkowe.

Przykład

$$\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial \bar{x}_k} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_k} + \zeta_k^\alpha + O(a^2)$$

$$\zeta_k^\alpha = D_k \eta^\alpha - u_j^\alpha D_k \xi^j$$

gdzie

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x^k} + u_k^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \dots$$

Twierdzenie

Na to by T_a była grupą niemienniczości układu

$$F^\sigma(x, u, \partial u, \dots \partial^r u) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, s,$$

potrzeba i wystarcza by zachodziła równość

$$\hat{X}_{(r)} F^\sigma \Big|_{F^\sigma=0} = 0, \quad (22)$$

gdzie

$$\hat{X}_{(r)} = \hat{X} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|J|=1}^r \zeta_{j_1, \dots, j_n}^\alpha \frac{\partial^{|J|}}{\partial u_{x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}}^\alpha}$$

jest przedłużeniem generatora \hat{X} na wszystkie pochodne cząstkowe rzędu r .

Symetrie równania transportu ciepła

Równanie

$$u_t = u_{xx}.$$

douszcza następujący zbiór generatorów:

$$\hat{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{X}_3 = u \frac{\partial}{\partial u},$$

$$\hat{X}_4 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\hat{X}_5 = 2t \frac{\partial}{\partial x} - ux \frac{\partial}{\partial u},$$

$$\hat{X}_6 = 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 4tx \frac{\partial}{\partial x} - u(x^2 + 2t) \frac{\partial}{\partial u},$$

$$\hat{X}_A = A(t, x) \frac{\partial}{\partial u}, \quad A(t, x)_t = A(t, x)_{xx}.$$

Rozwiązania niezmiennicze. Redukcja.

Założmy że skalarne równanie

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; u, \partial u, \dots, \partial^k u) = 0 \quad (23)$$

dopuszcza grupę jednoparametrową z generatorem

$$\hat{X} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u}.$$

Definicja

Funkcja

$$u = \theta(x) \quad (24)$$

nazywa się rozwiązaniem niezmienniczym jeżeli:

- ▶ *funkcja (24) jest powierzchnią niezmienniczą operatora \hat{X} , co oznacza że*

$$\hat{X}[u - \theta(x)] = 0; \quad (25)$$

- ▶ *funkcja (24) spełnia równanie (23).*

Procedura poszukiwania funkcji $\theta(x)$

1. Znajdujemy całki pierwsze $\tilde{X}_1(x, u), \tilde{X}_2(x, u), \dots, \tilde{X}_{n-1}(x, u), v(x, u)$ układu

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n} = \frac{du}{\eta}. \quad (26)$$

2. Traktując $v(x, u)$ jako nową zmienną zależną, przedstawiamy ją w postaci

$$v(x, u) = \Phi \left(\tilde{X}_1, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{n-1} \right), \quad (27)$$

3. Odpowiednie twierdzenie gwarantuje że równanie (23) przepisane w nowych zmiennych będzie miało postać

$$\tilde{F} \left(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_{n-1}; v, \partial v, \dots, \partial^k v \right) = 0. \quad (28)$$

Przykład 1: równanie transportu

Rozpatrzmy przekształcenia skalowania

$$t = e^{\alpha \bar{t}}, \quad x = e^{\beta \bar{x}}, \quad u = e^{\gamma \bar{u}}.$$

Równanie

$$u_t = u_{xx}$$

w nowych zmiennych przybiera postać

$$e^{\gamma - \alpha} \bar{u}_{\bar{t}} = e^{\gamma - 2\beta} \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}.$$

Zatem równanie jest niezmiennicze jeżeli

$$\alpha = 2\beta.$$

Odpowiedni generator infinitezymalny ma postać

$$\hat{X} = \gamma u \frac{\partial}{\partial u} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}.$$

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{du}{\gamma u} = \frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t}$$

otrzymujemy ansatz

$$u = t^{\frac{\gamma}{2}} \phi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}. \quad (29)$$

Przy $\gamma = -1$

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} \phi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}. \quad (30)$$

Ansatz ten pokrywa się (w przypadku $\kappa = Q = 1$) z tym który wcześniej uzyskaliśmy na podstawie analizy wymiarów.

Przykład 2.

Lemat

Każde równanie $F[u(t, x), \partial u_t(t, x) \dots \partial^r u_t(t, x)] = 0$ niezależne explicite od t, x dopuszcza przekształcenia

$$\bar{x} = x + a, \quad \bar{t} = t + b$$

z generatorami $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial t}$, odpowiednio.

Wniosek

Równanie Kortewega-de Vriesa (KdV)

$$u_t + u u_x + u_{xxx} = 0 \quad (31)$$

dopuszcza generator

$$\hat{X} = \frac{\partial}{\partial t} + s \frac{\partial}{\partial x}, \quad s = \text{const.} \quad (32)$$

Realizacja redukcji grupowej:

- ▶ znajdujemy całki pierwsze układu układ $\frac{dt}{1} = \frac{dx}{s} = \frac{du}{0}$

$$x - st = c_1, \quad u = c_2$$

- ▶ z nich konstruujemy ansatz

$$u = U(\xi) \equiv U(x - st)$$

- ▶ po podstawieniu tego ansatzu do równania KdV i scałkowaniu po zmiennej ξ otrzymujemy RRZ

$$U'' + \frac{U^2}{2} - sU = 0.$$

Można go przedstawić w postaci układu dynamicznego

$$\begin{aligned}U' &= -W = -\frac{\partial H}{\partial W} \\W' &= \frac{1}{2}U (U - 2s) \equiv \frac{\partial H}{\partial U},\end{aligned}\tag{33}$$

gdzie

$$H(U, W) = \frac{W^2}{2} + \frac{U^3}{6} - \frac{s}{2}U^2.\tag{34}$$

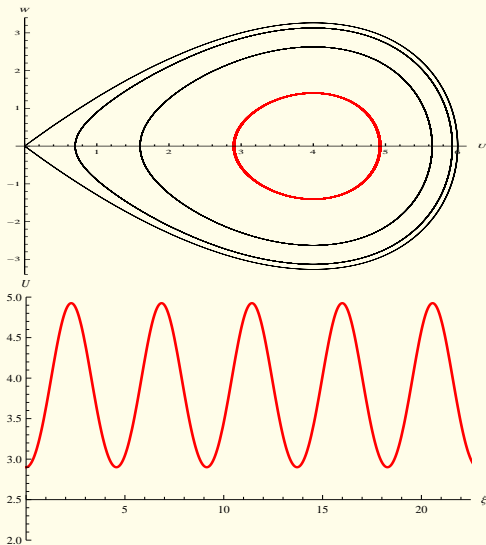
Lemat

Funkcja Hamiltona (34) zachowuje stałą wartość na rozwiązaniach układu dynamicznego (33).

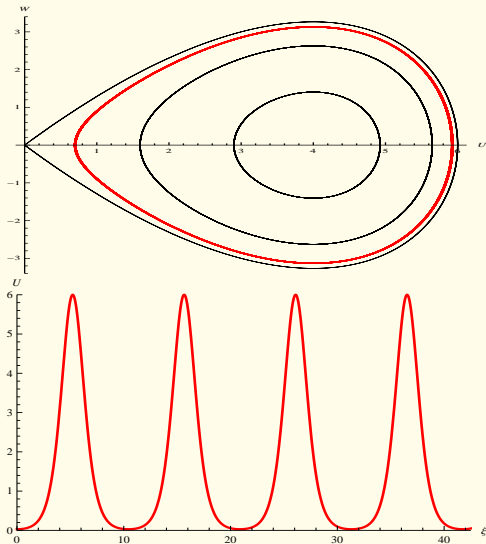
Wniosek

Każdą krzywą całkową $U(\xi)$, $W(\xi)$ można przedstawić w postaci

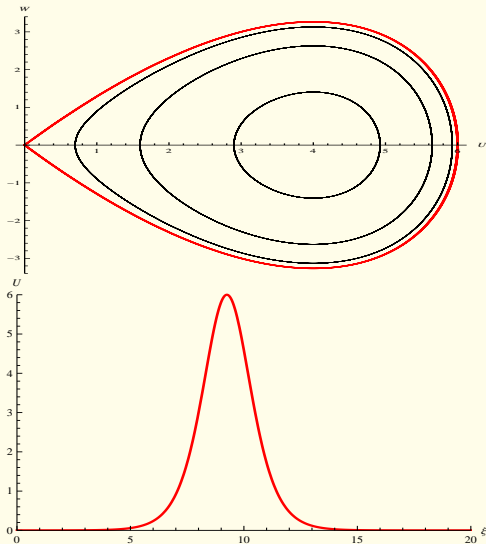
$$H(U, W) = \frac{W^2}{2} + \frac{U^3}{6} - \frac{s}{2}U^2 = C, \quad C = \text{const}$$



Rysunek : Górny rysunek: portret fazowy z wydzieloną trajektorią okresową; dolny rysunek: rozwiązanie równania KdV bliskie do funkcji sinusoidalnej.



Rysunek : Górny rysunek: portret fazowy z wydzielonym rozwiązaniem nieliniowym okresowym; dolny rysunek: rozwiązanie **knoidalne** równania KdV.



Rysunek : Górny rysunek: portret fazowy z wydzieloną trajektorią homokliniczną; dolny rysunek: rozwiązanie **solitonowe** równania KdV.

Rozwiązanie solitonowe, odpowiadające pętli homokliniki, można uzyskać całkując równanie

$$H(U, W) = \frac{W^2}{2} + \frac{U^3}{6} - \frac{s}{2} U^2 = 0, \quad W = -\frac{dU}{d\xi}.$$

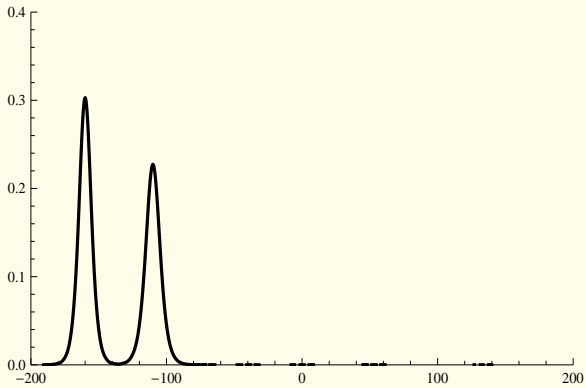
Rozwiązanie ma postać

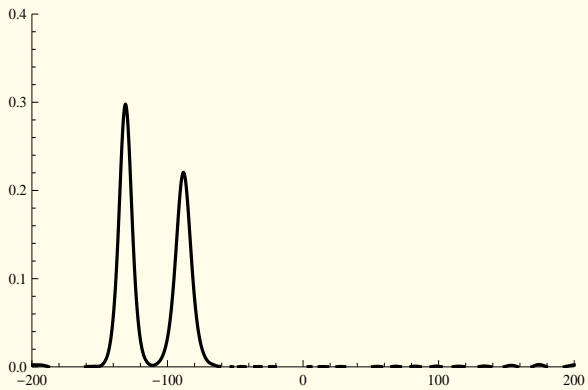
$$U(\xi) = 3s \cosh^{-2} \left[\frac{\sqrt{s}}{2} \xi \right], \quad \xi = x - st.$$

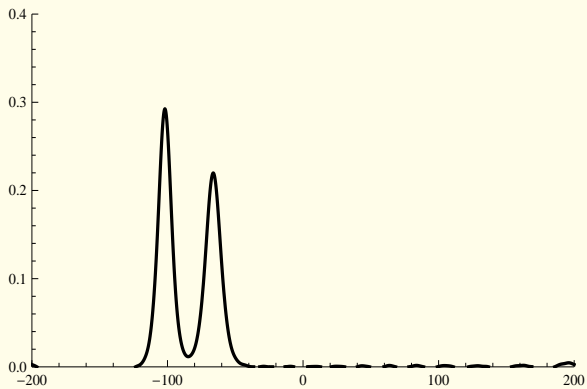
Zauważmy że amplituda solitona jest proporcjonalna do jego prędkości s .

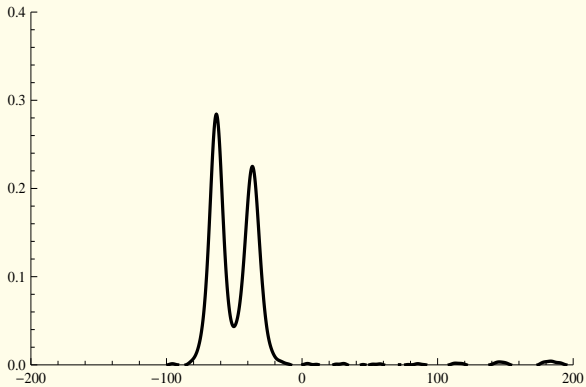
Dalsze własności:

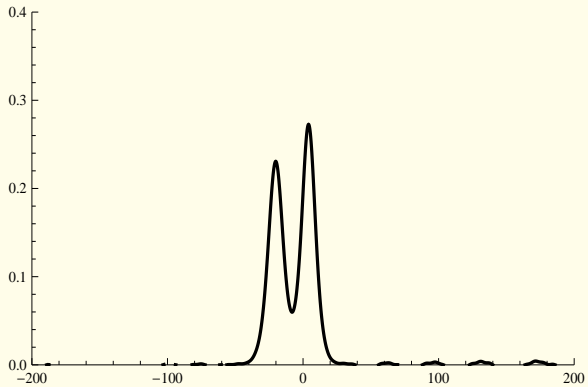
”sprężyste” oddziaływanie dwóch solitonów (wynik symulacji numerycznej):

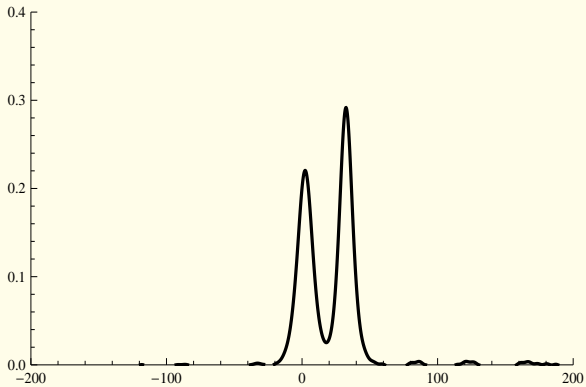


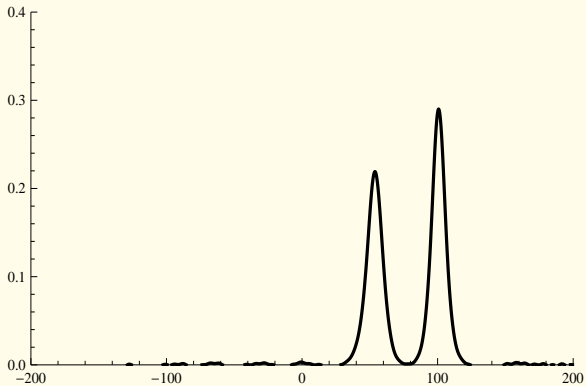


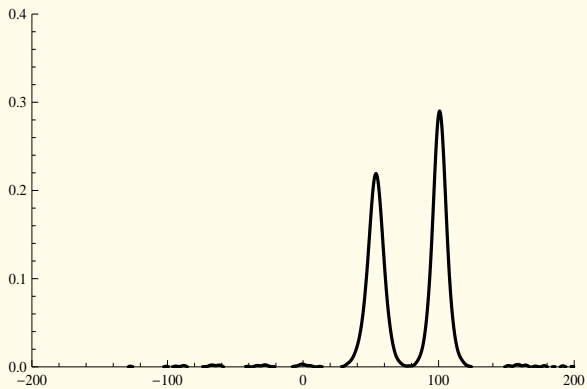




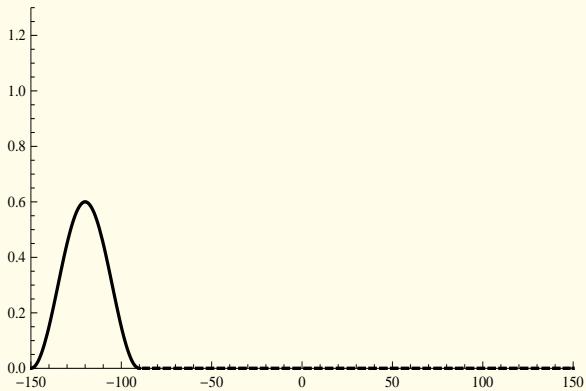


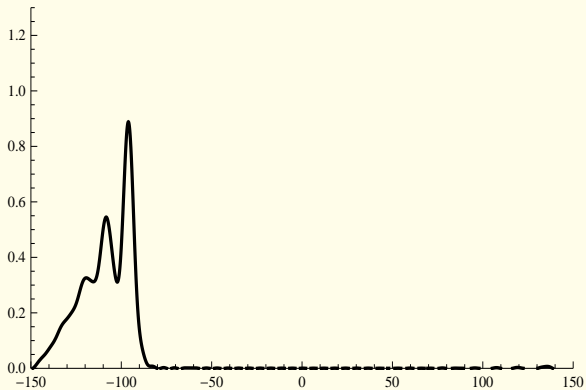


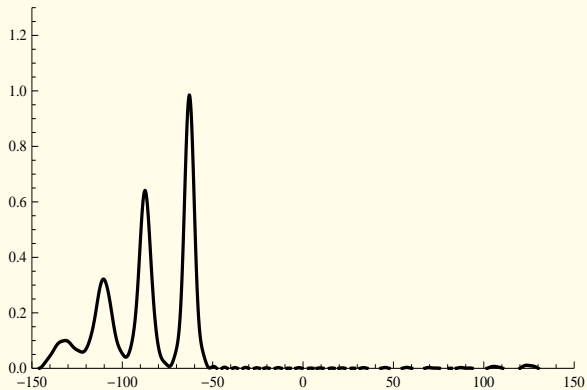


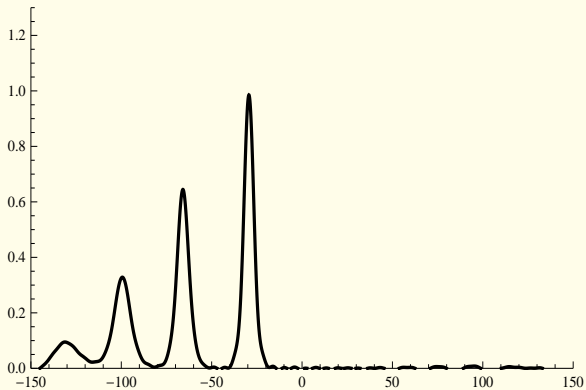


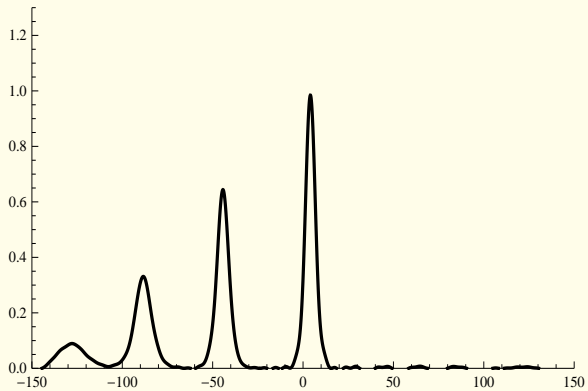
Istnienie szerokiej klasy gładkich danych Cauchy'ego $\varphi(x) \in C_0^k$ które w trakcie ewolucji "rozszczepiają się" na skończoną liczbę solitonów:

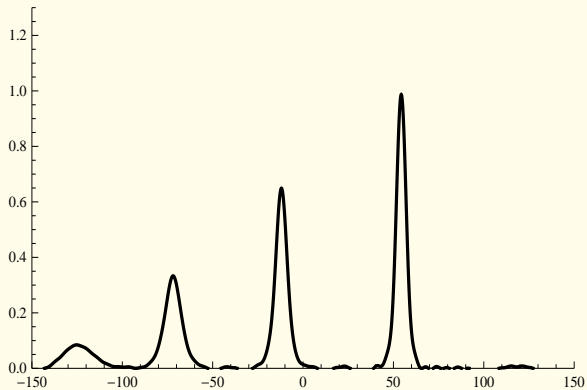


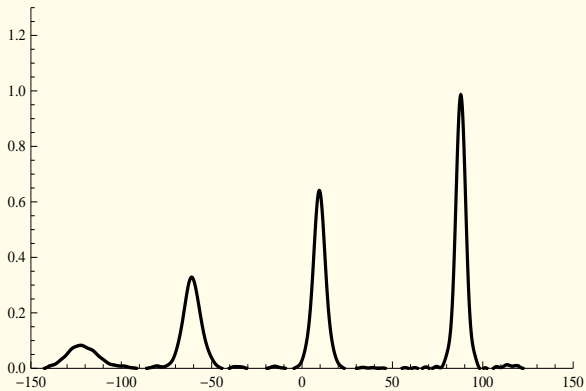

















Ogólna strategia

- ▶ Symetrie, prawa zachowania;
- ▶ redukcja, analiza jakościowa (metody teorii układów dynamicznych);
- ▶ stabilność (analiza spektralna);
- ▶ dynamika (symulacje numeryczne);
- ▶ asymptotyki, własności przyciągające rozwiązań niezmienniczych.

LITERATURA

-  Bluman G., Kumei S., *Symmetries and differential equations*, Springer, NY 1989.
-  Olver P., *Application of Lie groups to differential equations*, Springer, NY, 1994.
-  Barenblatt G., *Similarity, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics*, Academic Press, NY, 1996.
-  Vsevolod Vladimirov, *Nieliniowe modele zjawisk transportu*, skrypt, AGH, 2014,
<http://wms.mat.agh.edu.pl/~vladimir//frame.htm>
-  Vsevolod Vladimirov, *Analiza grupowa równań różniczkowych*, skrypt, AGH, 2012,
<http://wms.mat.agh.edu.pl/~vladimir/frame.htm>

Dziękuję za uwagę